МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(ДГТУ)

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА» И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ИХ ВЫПОЛНЕНИЯ

2 СЕМЕСТР

Учебно-методическое пособие

Предназначено для студентов 1-го курса заочной формы обучения по направлению 27.03.05 Инноватика

Ростов-на-Дону

ДГТУ

2022

Составитель: канд. физ.мат. наук, доцент Нурутдинова И.Н.

Приведены варианты заданий контрольных работ для студентов заочной формы обучения по основным темам, соответствующие базовому уровню изучения дисциплины «Высшая математика» во 2-м семестре. Приведены образцы решения всех заданий, снабжённые необходимыми теоретическими сведениями.

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие содержит индивидуальные задания контрольнй работы, выполняемой студентами заочной формы обучения во 2-м семестре. тематика заданий охватывает все основные разделы дисциплины «Математика», изучаемые во 2-м семестре: определенный интеграл, двойной интеграл, дифференциальные уравнения, ряды..

Задания по каждой теме имеют 20 вариантов, правило выбора варианта перед заданиями контрольной работы. Представлены основные теоретическими положения и понятия, соответствующие базовому уровню изучения дисциплины, и подробное решение всех заданий. Выбор тематики осуществлялся на основе анализа ФГОС3++ в базовой подготовке бакалавров направления 27.03.05. Также приведен список теоретических вопросов для подготовки к экзамену и рекомендуемая литература.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 2 ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. РЯДЫ

ПРАВИЛО ВЫБОРА ВАРИАНТА

Номер варианта студент выбирает согласно порядковому номеру в журнале группы. Если порядковый номер в журнале больше 20, то номер выбирается сначала, т.е. порядковый номер 21 - номер варианта - 1, порядковый номер 22 - номер варианта - 2 и т.д.

Задание 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

№ вар.	Уравнения линий	№ вар	Уравнения линий
1	$y=3x^2+1, \quad y=3x+7$	11	$y=x^2,\ y=\dfrac{1}{x},\ x=3$
2	$y=x^3, \quad y=8, \quad x=0$	12	$y=x^2-2,\ y=-x$
3	$y=x^2,\ y=2-x^2$	13	$y=x^2-1,\ y=1-x$
4	$y=x,\ y=1/x,\ x=3$	14	$y=\sin x,\ y=0,\ x=\pi/2$
5	$y=x^2,\ y=x+2$	15	$y=x^2-2,\ y=1-2x$
6	$y=\sqrt{x},\ y=x-2,\ x=0$	16	$y=\dfrac{2}{x},\ y=2x,\ x=2$
7	$y=x^2+1,\ y=x,\ x=0,\ x=2$	17	$y=2x-x^2,\ y=-x$
8	$y=x^2,\ y=3-2x$	18	$y=e^x,\ x=0,\ y=e$
9	$y=x^2-1,\ y=x+5$	19	$y=\sqrt{x},\ y=\dfrac{x}{2}$
10	$y=2-x^2,\ y=-x$	20	$y=2-x^2,\ y=x$

Задание 2. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями.

№ вар.	Уравнения линий	№ вар.	Уравнения линий
1	$x^2-y=0, \quad x=-1, \quad y=0$	11	$x^2-y=0, \quad y=1$
2	$x^2+y=0, \quad x=1, \quad y=0$	12	$x^2-y=0, \quad x=1, \quad y=0$

3	$x^2+y=0, \quad y=-1$	13	$x-y^2=0, \quad x=1$
4	$x-y^2=0, \quad x=0, \quad y=-1$	14	$y=4x^3, \quad x=1, \quad y=0$
5	$x+y^2=0, \quad x=-1$	15	$y=1+8x^3, \quad x=0, \quad y=9$
6	$x-y^2=0, \quad x=0, \quad y=1$	16	$y=4x^3, \quad x=0, \quad y=-4$
7	$x+y^2=0, \quad x=0, \quad y=1$	17	$y=-4x^3, \quad x=-1, \quad y=0$
8	$y=-4x^3, \quad x=0, \quad y=4$	18	$y=-4x^3, \quad x=0, \quad y=-4$
9	$y=-4x^3, \quad x=1, \quad y=0$	19	$y=4x^3, \quad x=-1, \quad y=0$
10	$y=4x^3, \quad x=0, \quad y=4$	20	$y=1+8x^3, \quad x=-\dfrac{1}{2}, \quad y=1$

Задание 3. Вычислить двойной интеграл по области D.

№ вар.	**Интеграл, область *D***	**№ вар.**	**Интеграл, область *D***
1	$\iint\limits_D \left(x^2+y\right)dx\,dy,\ D:\begin{cases} y=x, \\ y=2-x, \\ x=0. \end{cases}$	**3**	$\iint\limits_D (y+1)\,dx\,dy,\ D:\begin{cases} x=y, \\ x=2-y^2, \\ y=0,\ y=1. \end{cases}$
2	$\iint\limits_D (x-y)\,dx\,dy,\ D:\begin{cases} x=y, \\ x=1/y, \\ y=2. \end{cases}$	**4**	$\iint\limits_D \left(x-y^2\right)dx\,dy,\ D:\begin{cases} x=2-y, \\ x=y, \\ y=0. \end{cases}$
5	$\iint\limits_D xy\,dx\,dy,\ D:\begin{cases} x=2-y, \\ x=0, \\ y=-1, y=1. \end{cases}$	**13**	$\iint\limits_D \left(x^2+y\right)dx\,dy,\ D:\begin{cases} y=x+3, \\ y=-2x, \\ x=0. \end{cases}$
6	$\iint\limits_D \left(x^2+y\right)dx\,dy,\ D:\begin{cases} y=x+1, \\ y=x-1, \\ x=0, \\ x=1. \end{cases}$	**14**	$\iint\limits_D xy\,dx\,dy,\ D:\begin{cases} x=2y, \\ x=y-1, \\ y=0,\ y=1. \end{cases}$

7	$\iint\limits_D xy\,dx\,dy,\ D:\begin{cases} y=3-x, \\ y=x^2-9. \end{cases}$	**15**	$\iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy,\ D:\begin{cases} y=6-x, \\ y=x^2-6. \end{cases}$
8	$\iint\limits_D (x+1)\,dx\,dy,\ \ D:\begin{cases} y=2x^2-1, \\ y=x^2-1, \\ x=1. \end{cases}$	**16**	$\iint\limits_D (2+x)\,dx\,dy,\ \ D:\begin{cases} y=1-x^2, \\ y=1-2x^2, \\ x=1. \end{cases}$
9	$\iint\limits_D (x-y)\,dx\,dy,\ D:\begin{cases} x=4-3y, \\ x=y^2. \end{cases}$	**17**	$\iint\limits_D (y-1)\,dx\,dy,\ D:\begin{cases} x=2y^2-1, \\ x=y^2-1, \\ y=1. \end{cases}$
10	$\iint\limits_D (2x-y)\,dx\,dy,\ D:\begin{cases} y=2-x^2, \\ y=x. \end{cases}$	**18**	$\iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy,\ \ D:\begin{cases} x=2y, \\ x=y-1, \\ y=1. \end{cases}$
11	$\iint\limits_D (2x+y)\,dx\,dy,\ D:\begin{cases} x=-y^2, \\ x=y^2/4, \\ y=0, \\ y=1. \end{cases}$	**19**	$\iint\limits_D xy\,dx\,dy,\ \ \ \ D:\begin{cases} y=2x, \\ y=3-x, \\ x=0. \end{cases}$
12	$\iint\limits_D (x-y)\,dx\,dy,\ D:\begin{cases} y=x, \\ y=x^3, \\ x=2. \end{cases}$	**20**	$\iint\limits_D (y+2)\,dx\,dy,\ \ D:\begin{cases} x=y^2, \\ x=-2y^2, \\ y=1. \end{cases}$

Задание 4. Решить дифференциальные уравнения (ДУ)

Номер варианта	**4.1** Найти общее решение ДУ 1-го порядка с разделяющимися переменными	**4.2** Найти общее решение однородного ДУ 1-го порядка
1	$4-y^2+xy'=0$	$y'=\frac{y}{x}\left(1+\ln\frac{y}{x}\right)$
2	$xyy'=1+y^2$	$xy'=y+xe^{\frac{y}{x}}$
3	$y'+x^3\cos^2 y=0$	$x^2y'=y^2+xy$

4	$y'(1+y)=3-x$	$xy'-y=x\sin\frac{y}{x}$
5	$y'\sin^2 x=2+y$	$xy'=y+\sqrt{x^2+y^2}$
6	$y'\mathrm{ctg}x+y^2=1$	$y'=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$
7	$y'-e^{x+y}=0$	$xyy'-y^2=2x^2$
8	$(1-x^2)y'=2xy^2$	$y'=\frac{y}{x}+\cos\frac{y}{x}$
9	$\cos^2 x\cdot y'=\sqrt{1-y^2}$	$x^2y'=y^2+xy-x^2$
10	$(1+x^2)y'+y=0$	$xy'e^{\frac{y}{x}}+x=ye^{\frac{y}{x}}$
11	$\sqrt{1+y^2}=x^2yy'$	$y'-\frac{y}{x}=\frac{y^2}{x^2}-4$
12	$(4-x^2)y'=2xy^2$	$x\left(y'+e^{\frac{y}{x}}\right)=y$
13	$\sqrt{2x-3}\cdot y'-\mathrm{ctg}y=0$	$xy'=x-3y$
14	$x^2y^2\cdot y'-4=0$	$xy'=y+x\,\mathrm{tg}\frac{y}{x}$
15	$y'=\mathrm{tg}2x\cdot(1-y)$	$x^2y'+y^2-xy=0$
16	$xy'=y^2(x+1)$	$xy'-y=\sqrt{x^2-y^2}$
17	$3-y^2+x^2y'=0$	$y'\sin\frac{y}{x}+1=\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x}$
18	$y(1-x^2)y'+x=0$	$xy'=y\left(1-\ln\frac{y}{x}\right)$
19	$xy^2y'=4-x^2$	$x^2+y^2=2xyy'$
20	$y'=\frac{1}{y}-y$	$xy'\cos\frac{y}{x}=y\cos\frac{y}{x}-x$

Задание 5. Решить ДУ

Номер варианта	**5.1** Найти общее решение линейного ДУ 1-го порядка	**5.2** Определить тип ДУ 1-го порядка и решить задачу Коши

1	$y'-2y=xe^{3x}$	$y'+y\,\mathrm{tg}x=\cos^2 x,\quad y(0)=-1$
2	$xy'-2y=x^3\cos x$	$y'-y^2(x+1)=0,\quad y(2)=1$
3	$x(y'-y)=(1+x^2)e^x$	$y'+\frac{y}{x}=x^2y^2,\quad y(1)=1$
4	$y'-\frac{y}{x\ln x}=x\ln x$	$y'=\frac{y}{x}-\frac{1}{\cos\frac{y}{x}},\quad y(e)=0$
5	$y'+y+4x-1=0$	$xy^2y'-2+x^2=0,\quad y(1)=-1$
6	$y'+\frac{y}{x}-2\ln x=0$	$y'-2xy=xe^{x^2},\quad y(0)=-1$
7	$y'+2xy=x\sin x e^{-x^2}$	$y'-y=-y^2e^x,\quad y(0)=1$
8	$y'-y-x=0$	$x^2y^2y'+2=0,\quad y(2)=-1$
9	$xy'=xy+e^x$	$y'-\frac{y}{x}=\cos^2\frac{y}{x},\quad y(1)=\frac{\pi}{4}$
10	$y'+y\,\mathrm{tg}x=x\cos^2 x$	$xyy'-\sqrt{1+y^2}=0,\quad y(1)=-1$
11	$(1-x)(y'+y)=e^{-x}$	$xy'-2y=x^3\cos x,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$
12	$y'-\frac{y}{x}=\frac{1}{x^2}$	$y'-y(2x+1)=0,\quad y(1)=e$
13	$y'-2xy=\sin 2x\cdot e^{x^2}$	$y'-y\,\mathrm{tg}x+y^2\cos x=0,\quad y(0)=1$
14	$y'=\frac{y}{x+1}+e^x(x+1)^2$	$xyy'=y^2+x^2,\quad y(-1)=2$
15	$xy'+y-xe^x=0$	$y'-e^{2x}(4+y^2)=0,\quad y(0)=2$
16	$y'=-y\,\mathrm{ctg}x+\frac{x^2-1}{\sin x}$	$y'-y\,\mathrm{ctg}x=\sin^2 x,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$
17	$xy'=y+x^2\cos 3x$	$y'-y=(x+1)e^x,\quad y(0)=-1$
18	$(5+x)y'=2y+(5+x)^3$	$(2-x^2)y'-2xy^2=0,\quad y(-1)=1$
19	$y'=2y+x$	$(1+x^2)y'=xy,\quad y(1)=\sqrt{2}$

20	$y'-2xy=xe^{x^2}$	$y'-\frac{y}{x}=\frac{y^2}{x},\quad y(1)=1$

Задание 6.. Решить ДУ

Номер варианта	Найти общее решение линейных однородных ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами		
1	$2y''-5y'+2y=0$	$y''-6y'+9y=0$	$y''+2\sqrt{3}y'+4y=0$
2	$y''-2y'-3y=0$	$4y''+4y'+y=0$	$y''-0{,}2y'+2{,}01y=0$
3	$6y''+y'-y=0$	$y''+2y'+y=0$	$16y''-16y'+5y=0$
4	$y''-y'-2y=0$	$9y''+6y'+y=0$	$y''-0{,}2y'+0{,}05y=0$
5	$4y''-5y'+y=0$	$9y''-12y'+4y=0$	$y''+2y'+1{,}16y=0$
6	$5y''+4y'-y=0$	$y''-y'+0{,}25y=0$	$y''+4y'+20y=0$
7	$2y''-y'-3y=0$	$0{,}01y''+0{,}2y'+y=0$	$y''-4y'+13y=0$
8	$y''+2y'-8y=0$	$y''-4y'+4y=0$	$y''-0{,}6y'+4{,}09y=0$
9	$6y''-5y'+y=0$	$y''+10y'+25y=0$	$y''-2y'+3y=0$
10	$3y''-2y'-y=0$	$y''-8y'+16y=0$	$y''+2\sqrt{2}y'+3y=0$
11	$3y''-8y'+4y=0$	$16y''+8y'+y=0$	$y''+0{,}2y'+4{,}01y=0$
12	$y''+4y'+3y=0$	$y''+0{,}6y'+0{,}09y=0$	$y''+2y'+17y=0$
13	$3y''+4y'-4y=0$	$y''-2\sqrt{2}y'+2y=0$	$y''-4y'+8y=0$
14	$4y''+7y'-2y=0$	$y''+0{,}8y'+0{,}16y=0$	$y''-6y'+10y=0$
15	$2y''-y'-6y=0$	$y''-2y'+y=0$	$y''+4y'+13y=0$
16	$5y''+2y'=0$	$y''+y'+0{,}25y=0$	$y''-6y'+13y=0$

17	$y''-y'-6y=0$	$y''+0{,}4y'+0{,}04y=0$	$y''+4y'+5y=0$
18	$4y''-y=0$	$9y''+12y'+4y=0$	$y''-2y'+5y=0$
19	$3y''-5y'+2y=0$	$y''+2\sqrt{3}y'+3y=0$	$y''-4y'+5y=0$
20	$8y''-6y'+y=0$	$y''+1{,}2y'+0{,}36y=0$	$y''-2y'+2y=0$

Задание 7.. Решить ДУ

Номер варианта	Решить задачу Коши для ДУ второго порядка	
	7.1 Решить задачу Коши для однородного ДУ второго порядка	**7.2** Решить задачу Коши для ДУ второго порядка, допускающего понижение порядка
1	$y''+4y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=3$	$y''=\dfrac{1}{\cos^2 x},\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0$
2	$y''+1{,}44y=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0$	$y''=\sin\dfrac{x}{2},\quad y(\pi)=\pi,\quad y'(\pi)=1$
3	$y''+25y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=12$	$y''=e^{2x}-\sin x,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1$
4	$y''+49y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1$	$y''=\cos(1-2x),\ y\left(\dfrac{1}{2}\right)=1,\ y'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$
5	$y''+9y=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=2$	$y''=\dfrac{1}{\sin^2 x},\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{2},\ y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$
6	$y''+16y=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0$	$y''=e^{-\frac{x}{2}}+x,\ y(0)=-1,\ y'(0)=0$
7	$y''+36y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=5$	$y''=2\sin^2 x,\ y(0)=1,\ y'(0)=1$
8	$3y''+2y=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=2$	$y''=\sin\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2},\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2},\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$
9	$y''+1{,}21y=0,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=1$	$y''=\dfrac{3}{x}+x,\ y(1)=-3,\ y'(1)=\dfrac{1}{2}$
10	$y''+64y=0,\quad y(0)=4,\quad y'(0)=-3$	$y''=\cos^2 2x,\ y(0)=0,\ y'(0)=0$
11	$y''+81y=0,\quad y(0)=5,\quad y'(0)=6$	$y''=\sin 4x+e^{-2x},\ y(0)=2,\ y'(0)=-1$
12	$2y''+0{,}72y=0,\quad y(0)=-3,\quad y'(0)=5$	$y''=\dfrac{\sin x}{\cos^3 x},\ y(0)=1,\ y'(0)=-\dfrac{1}{2}$

13	$3y''+0,48y=0,\quad y(0)=5,\quad y'(0)=-3$	$y''=\sqrt{2-x},\ y(1)=1,\ y'(1)=\frac{1}{3}$
14	$y''+121y=0,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=-1$	$y''=\sin^2 3x,\ y(0)=1,\ y'(0)=0$
15	$y''+225y=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=-1$	$y''=\frac{\cos x}{\sin^3 x},\ y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3},\ y'\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$
16	$y''+0,25y=0,\quad y(0)=5,\quad y'(0)=-3$	$y''=\frac{1}{(2x-3)^2},\ y(1)=0,\ y'(1)=-\frac{1}{2}$
17	$y''+0,64y=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0$	$y''=\cos\pi x,\ y(1)=0,\ y'(1)=0$
18	$y''+0,36y=0,\quad y(0)=-1,\quad y'(0)=2$	$y''=\frac{2}{x^3}+\sqrt{x},\ y(1)=0,\ y'(1)=-1$
19	$y''+y=0,\quad y(0)=4,\quad y'(0)=-1$	$y''=4\cos^2 x,\ y(0)=\frac{1}{2},\ y'(0)=2$
20	$y''+2,56y=0,\quad y(0)=-1,\ y'(0)=-5$	$y''=\frac{1}{x}-2,\ y(1)=2,\ y'(1)=1$

Задание 8. Исследовать сходимость положительных рядов:

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{10^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$;

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$;

4. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{3n^2-1}\right)^n$;

5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(1+n)}$;

6. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2-2n}{2n^2+1}\right)^n$;

7. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\frac{\pi}{2^n}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-1}{6n+2}\right)^n$;

8.а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{n!}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{\pi}{\sqrt{n}}$;

9.а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$;

10. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{3^n}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n-1}$;

11.а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{2^{n-1}}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+2}$;

12.а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-1}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4+6n}{3n-1}\right)^n$;

13.а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)!}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$;

14.а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2-1}{3n^2+5}\right)^{3n}$;

15.а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \arcsin\frac{1}{5^n}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{3n^2}\right)^{n^2}$;

16. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+2)!}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2-1}{5n^2-4}\right)^n$;

17. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n-1}{2^n+1}$;

18. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \operatorname{arctg}\frac{1}{2^n}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{3^n}$;

19. а) $\sum_{n=1}^{\infty} n^4\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{\pi}{\sqrt{n}}$;

20. а) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \ln\left(1+\frac{1}{3^n}\right)$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n^2-4}{4n^2+5}\right)^n$.

Задание 9. Знакочередующиеся ряды.

Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2n-1}$;

2 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot n\cdot e^{-n}$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{\ln(n+1)}$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(2n-1)^{3/2}}$;

5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{n}{6n^2-5}$;

6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{(2n-1)^3}$;

7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}$;

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2+1}}$;

9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{n+1}{n^3+3n}$;

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi(-1)^{n-1}}{3n-2}$;

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)^n$;

12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+2}$;

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$;

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{n}{1+2n}\right)^n$;

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left((-1)^{n-1}\frac{\pi}{3^n}\right)$;

16. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$;

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}\cdot n}{n^{3/2}+2}$;

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$;

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{(-2)^{n-1}}$;

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln\dfrac{n+1}{n}$;

Задание 10. Степенные ряды.

Найти радиус сходимости степенного ряда и исследовать поведение ряда на концах интервала сходимости:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{n-1}\cdot x^{n-1}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-4)^n}{7^n}$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^2+1}\left(\dfrac{x}{4}\right)^n$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n-1}}{n\cdot 10^{n-1}}$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3x)^n}{2^n}$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-2x)^{n-1}}{2n-1}$

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-4)^n\cdot x^{n-1}$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\left(\dfrac{x}{3}\right)^n$

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-2x)^n}{\sqrt{n}}$

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)\left(-\dfrac{x}{5}\right)^n$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-2x)^{n-1}}{n^2}$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\cdot\dfrac{x^n}{\sqrt{2n+1}}$

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-10x)^n}{\sqrt{n+1}}$

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^n}{2^n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n \cdot x^n}{\sqrt{n}}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + n}$

Задание 11. Разложение функций в степенные ряды

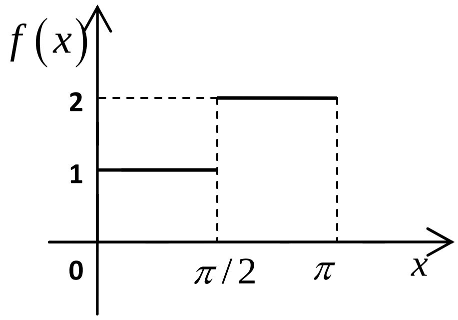
Пользуясь формулами разложения элементарных функций в ряды Маклорена, представить заданную функцию $y = f(x)$ в виде ряда по степеням $(x - x_0)$. Указать множество всех значений x, для которых верно полученное разложение:

1. $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}; \quad x_0 = 0$
2. $y = \ln x; \quad x_0 = 1$
3. $y = \frac{1}{x}; \quad x_0 = 1$
4. $y = \sqrt[3]{x^2}; \quad x_0 = 1$
5. $y = e^{3x}; \quad x_0 = 0$
6. $y = \sin\frac{x}{2}; \quad x_0 = 0$
7. $y = \sqrt[3]{8 - x^3}; \quad x_0 = 0$
8. $y = \cos 3x; \quad x_0 = 0$
9. $y = \sin^2 x; \quad x_0 = 0$
10. $y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}; \quad x_0 = 0$
11. $y = \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}; \quad x_0 = 0$
12. $y = \cos^2 x; \quad x_0 = 0$
13. $y = e^{-2x}; \quad x_0 = 0$
14. $y = \cos\frac{x}{2}; \quad x_0 = 0$
15. $y = \ln(3 + x); \quad x_0 = 0$
16. $y = \cos^2 2x; \quad x_0 = 0$
17. $y = \sqrt{4 - x^2}; \quad x_0 = 0$
18. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}; \quad x_0 = 0$
19. $y = \sin^2 2x; \quad x_0 = 0$
20. $y = e^{-5x}; \quad x_0 = 0$

Задание 12. Ряды Фурье.

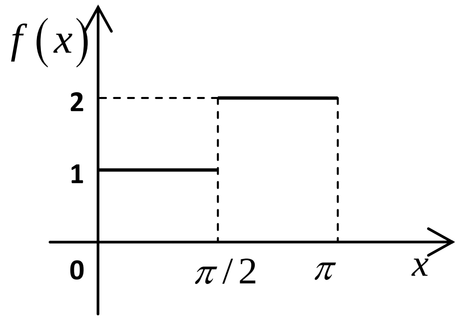
Для функции $f(x)$, заданной графически, найти ее ряд Фурье по синусам или косинусам на интервале $(0,l)$ (доопределив ее соответствующим образом на интервал $(-l,0)$). Найти сумму ряда Фурье в каждой точке отрезка $[0,l]$.

1.



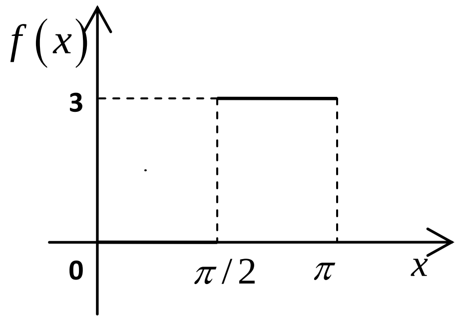
по синусам

3.



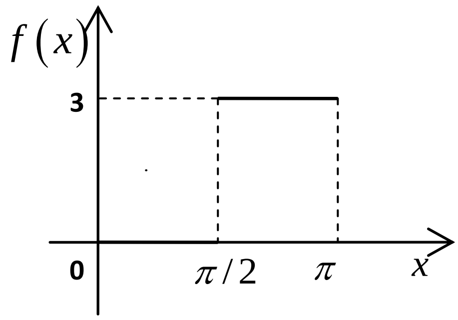
по косинусам

2.



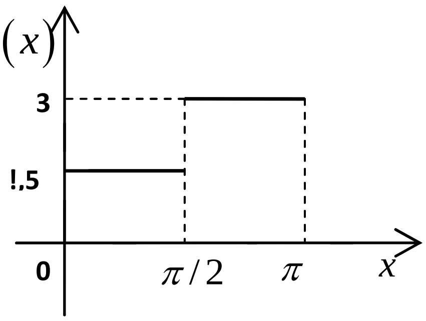
по синусам

4.



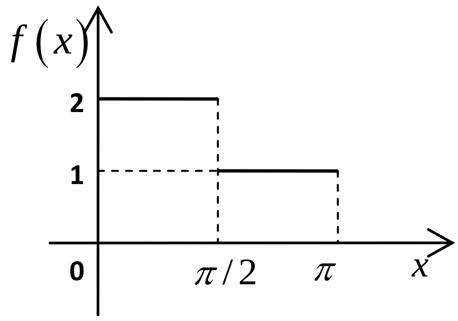
по косинусам

5.



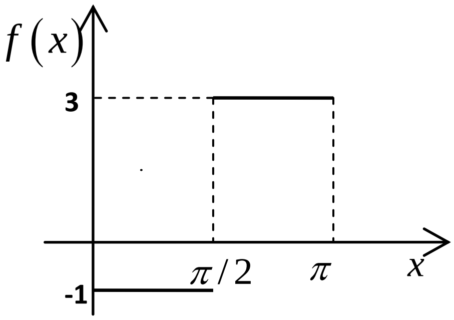
по синусам

9.



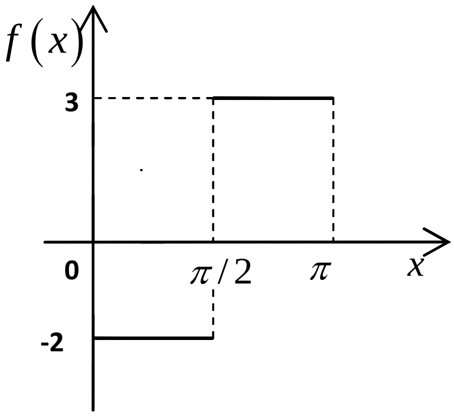
по косинусам

6.



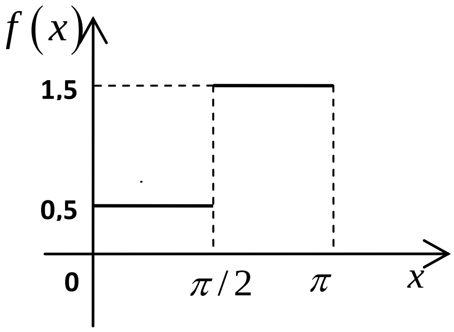
по синусам

7.



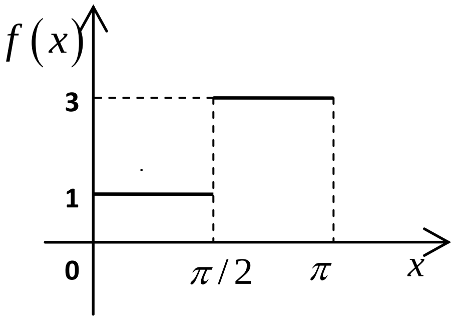
по синусам

8.



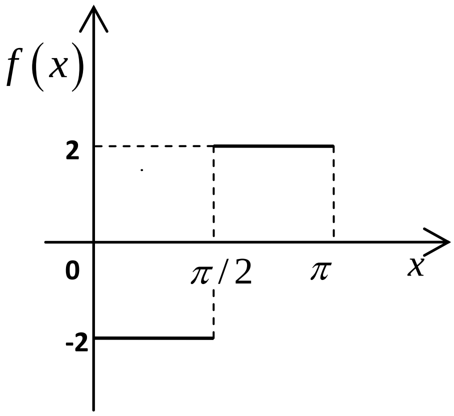
по синусам

10.



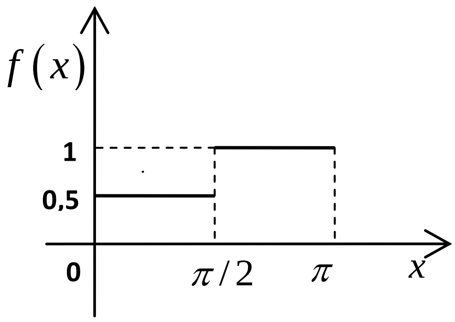
по косинусам

11.



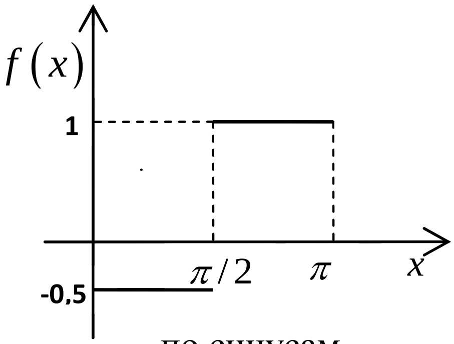
по косинусам

12.



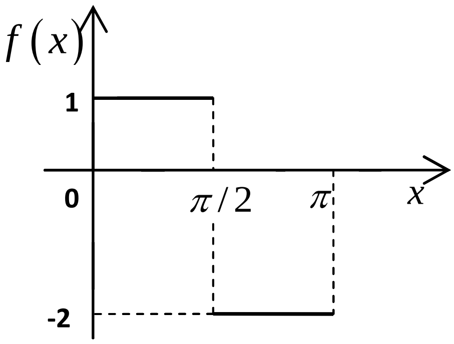
по косинусам

13.



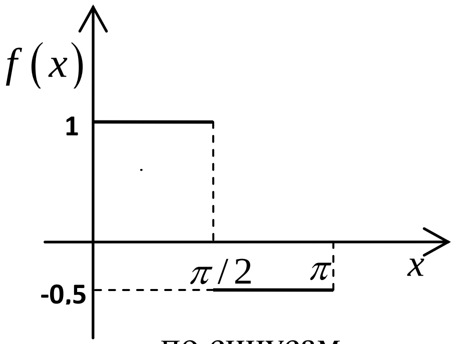
по синусам

14.



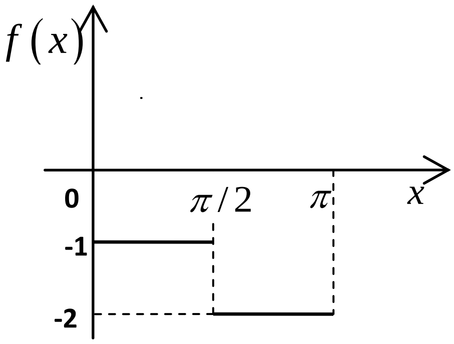
по синусам

15.



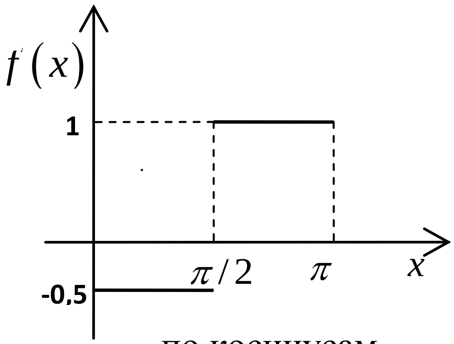
по синусам

16.



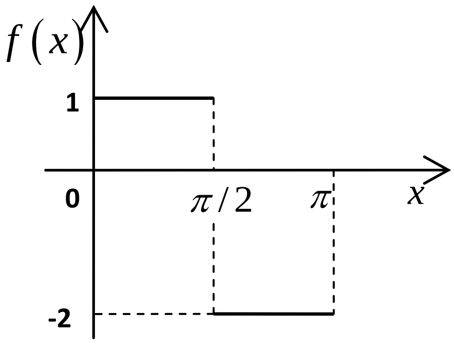
по синусам

17.



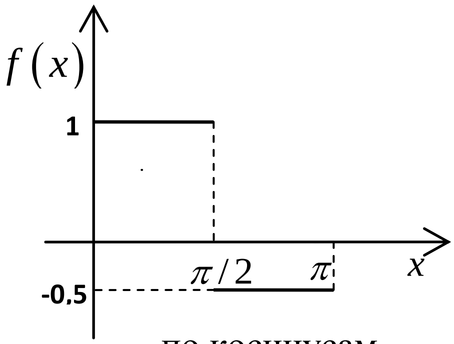
по косинусам

18.



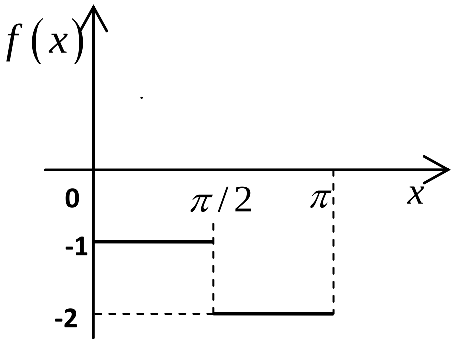
по косинусам

19.



по косинусам

20.



по косинусам

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 2

Определенный интеграл, его вычисление и свойства

Определенный интеграл от функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a,b]$, вычисляется по формуле:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \tag{5}$$

где $F(x)$— первообразная для функции $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$.

Формула (5) называется *формулой Ньютона — Лейбница.*

Свойства определенного интеграла:

1) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$; 2) $\int_a^a f(x)dx = 0$;

3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$; 4) $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;

5) $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx,\ C - \mathrm{const}$;

6) Если $f(x) \le g(x)$ для всех $x \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$;

7) Если $m \le f(x) \le M$ для всех $x \in [a,b]$, то $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

При вычислении определенного интеграла для нахождения первообразной используют те же методы, что и для нахождения неопределенного интеграла, т. е. замену переменной, интегрирование по частям и т. д. Однако есть ряд особенностей. При замене переменной по формуле (1) необходимо в соответствии с заменой менять пределы интегрирования:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dx, \tag{6}$$

где $\alpha = \psi(a),\ \beta = \psi(b),\ t = \psi(x)$ — обратная к $x = \varphi(t)$ функция.

Формула интегрирования по частям (3) приобретает вид:

$$\int_{a}^{b} UdV = UV\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} VdU, \tag{7}$$

Определенный интеграл широко используется в различных приложениях, например, при вычислении площадей плоских фигур, длин дуг плоских кривых, объемов тел вращения, площадей поверхностей вращения, работы переменной силы на отрезке, пути, пройденного за промежуток времемени, статических моментов и моментов инерции плоских дуг и фигур и т. д.

Площади плоских фигур

Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат

Если плоская фигура (рис. 1) ограничена линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, где $f_2(x) \ge f_1(x)$ для всех $x \in [a,b]$, и прямыми $x = a$, $x = b$, то ее площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_{a}^{b} \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx. \tag{8}$$

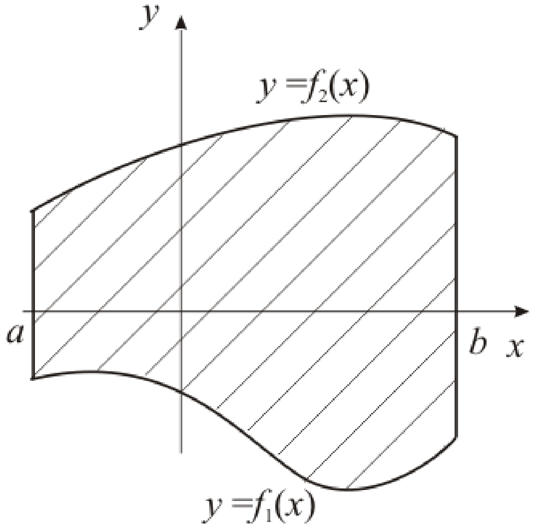


Рис. 1

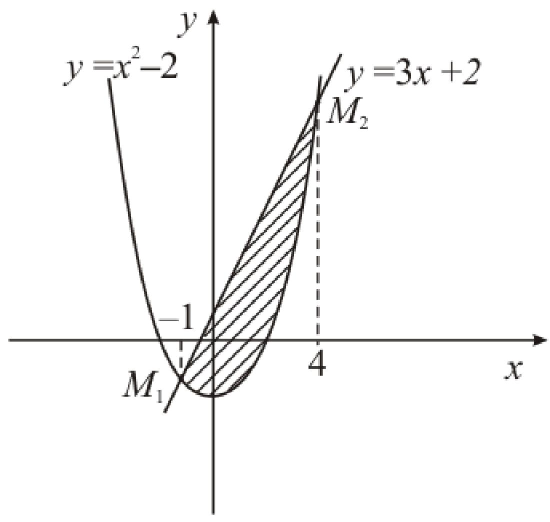


Рис. 2

Задание 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 - 2,\ y = 3x + 2.$$

Решение. Построим схематический рисунок (рис. 2). Для построения параболы возьмем несколько точек:

x	0	1	–1	2	–2	3	–3	4	–4
y	–2	–1	–1	2	2	7	7	14	14

Для построения прямой достаточно двух точек, например $(0,\ 2)$ и $(-1, -1)$.

Найдем координаты точек M_1 и M_2 пересечения параболы $y = x^2 - 2$ и прямой $y = 3x + 2$.

Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y = 3x + 2. \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2 = 3x + 2,\quad x^2 - 3x - 4 = 0,\quad x_1 = -1,\ \ x_2 = 4.$$

Тогда $y_1 = 3 \cdot (-1) + 2 = -1,\ \ y_2 = 3 \cdot 4 + 2 = 14.$ Итак, $M_1(-1,-1),\ \ M_2(4,14).$

Площадь полученной фигуры найдем по формуле (8), в которой $f_2(x) = 3x + 2,\ f_1(x) = x^2 - 2,$ поскольку $f_2(x) \ge f_1(x)$ для всех $x \in [-1, 4]$. Получим:

$$S = \int_{-1}^{4} \left(3x + 2 - \left(x^2 - 2\right)\right) dx = \int_{-1}^{4} \left(3x - x^2 + 4\right) dx = \left.\left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 4x\right)\right|_{-1}^{4} =$$

$$= \frac{3 \cdot 4^2}{2} - \frac{4^3}{3} + 4 \cdot 4 - \left(\frac{3 \cdot (-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3} + 4 \cdot (-1)\right) = 24 - \frac{64}{3} + 16 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 4 =$$

$$= 44 - \frac{65}{3} - \frac{3}{2} = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6}\ (\text{кв.ед.})$$

Вычисление объемов тел вращения

Если тело образовано вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью OX и прямыми $x = a$, $x = b$ (рис. 3), то его объем вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x) \right)^2 dx. \tag{9}$$

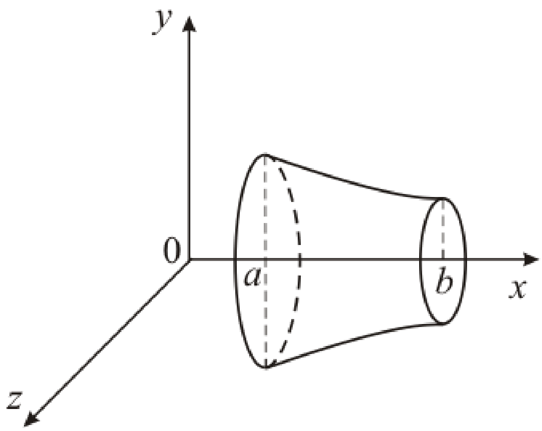


Рис. 3

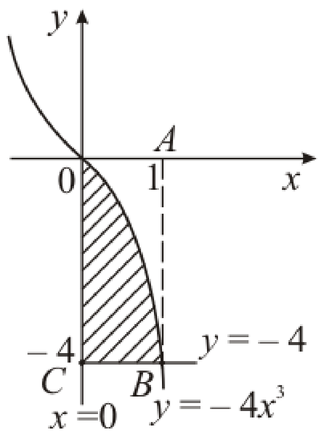


Рис. 4

Задание 2. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями: $y = -4x^3$, $x = 0$, $y = -4$.

Решение. Построим криволинейную трапецию, вращением которой получается тело вращения (рис. 4).

Чтобы получить объем тела вращения из объема V_1 тела, полученного вращением фигуры $OABC$, вычтем объем V_2 тела, полученного вращением фигуры OAB. Тогда искомый объем $V = V_1 - V_2$. По формуле (9) найдем V_1 и V_2: $\quad V_1 = \pi \int_0^1 (-4)^2 dx = \pi 16 x \Big|_0^1 = 16\pi$ (ед. объема);

$$V_2 = \pi \int_0^1 \left(-4x^3 \right)^2 dx = 16\pi \int_0^1 x^6 dx = 16\pi \frac{x^7}{7} = \frac{16\pi}{7} \text{ (ед. объема);}$$

$$V = V_1 - V_2 = 16\pi - \frac{16\pi}{7} = \frac{96}{7}\pi \approx 43,085 \text{ (ед. объема).}$$

Двойной интеграл.

Рассмотрим область D на плоскости XOY. Область D называют *правильной в направлении оси OY*, если любая прямая параллельная этой оси и проходящая через внутреннюю точку области D пересекают границу области в двух точках. Область D правильная в направлении оси OY (случай I, рис. 5) описывается системой неравенств (10). Аналогично определяется правильная область в направлении оси OX (случай II рис. 6), такая область описывается системой неравенств (11).

Случай I

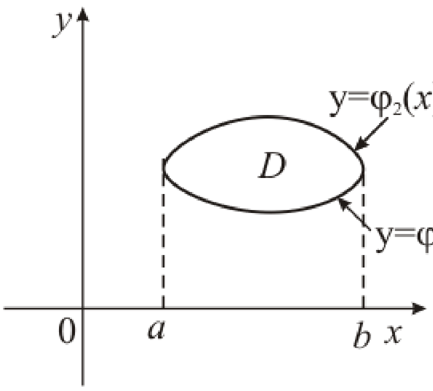


Рис. 5

Случай II

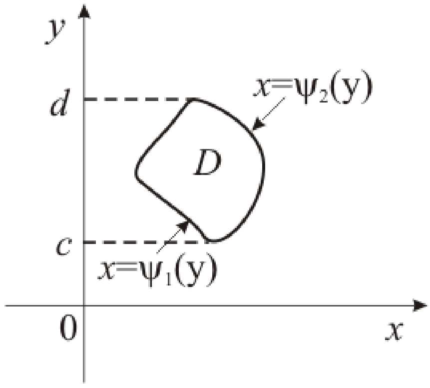


Рис. 6

$$D:\begin{cases} a \le x \le b \\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x). \end{cases} \quad (10) \qquad D:\begin{cases} c \le y \le d \\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y). \end{cases} \quad (11)$$

Двойной интеграл от функции $z = f(x, y)$ по области D вычисляется по формулам, сводящим двойной интеграл к повторному.

Случай I

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy. \quad (12)$$

Случай II

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx. \quad (13)$$

При вычислении двойного интеграла по формулам (12) и (13) сначала находят внутренний интеграл по соответствующей переменной, при этом другая переменная рассматривается как постоянная, а затем находят наружный интеграл по второй переменной. При вычислении учитывают, что двойной интеграл обладает свойствами, аналогичными свойствам определенного интеграла. Так, если область D не имеет такого вида, как в случаях I или II, то ее разбивают прямыми, параллельными осям координат на непересекающейся области D_1, D_2, …, D_k, которые имеют вид I или II. Двойной интеграл по области D в этом случае равен сумме двойных интегралов по областям D_1, D_2, …, D_k.

Задание 3. Вычислить двойной интеграл по области D:

$$a)\iint\limits_D (2x-y)\,dx\,dy,\ D:\begin{cases} y=x^2, \\ y=-x, \\ x=2. \end{cases};\quad б)\iint\limits_D xy\,dx\,dy,\ D:\begin{cases} x=y^2, \\ x=2-y. \end{cases}.$$

Решение. *а*) Построим область D на плоскости XOY (рис. 7). Область D опишем системой неравенств (случай I):

$$D:\begin{cases} 0\le x\le 2, \\ -x\le y\le x^2. \end{cases}$$

Тогда по формуле (12) получим:

$$\iint\limits_D (2x-y)\,dx\,dy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{-x}^{x^2}(2x-y)\,dy=$$

$$=\int\limits_0^2 dx\left(2x\int\limits_{-x}^{x^2}dy-\int\limits_{-x}^{x^2}y\,dy\right)=$$

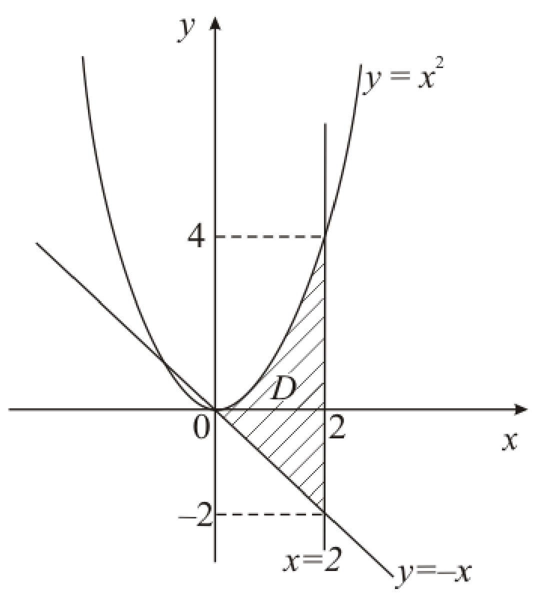


Рис. 7

$$\int\limits_0^2 dx\left(2xy\Big|_{-x}^{x^2}-\frac{y^2}{2}\Big|_{-x}^{x^2}\right)=\int\limits_0^2 dx\left(2x\left(x^2+x\right)-\left(\frac{x^4}{2}-\frac{x^2}{2}\right)\right)=\int\limits_0^2 dx\left(2x^3+2x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^2}{2}\right)=$$

$$=\int\limits_0^2\left(2x^3+\frac{5}{2}x^2-\frac{x^4}{2}\right)dx=\left(2\frac{x^4}{4}+\frac{5}{2}\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2=\frac{2^4}{2}+\frac{5}{6}2^3-\frac{1}{10}2^5=$$

$$=8+\frac{20}{3}-\frac{16}{5}=11\frac{7}{15}.$$

б) $\iint\limits_D xy\,dx\,dy$, $\qquad D:\begin{cases} x = y^2, \\ x = 2 - y. \end{cases}$

Построим область D на плоскости XOY (рис. 8). Чтобы найти координаты точек пересечений графиков функций $x = y^2$, $x = 2 - y$, решим уравнение $y^2 = 2 - y \Rightarrow y^2 + y - 2 = 0$, $y_{1,2} = -2, 1$.

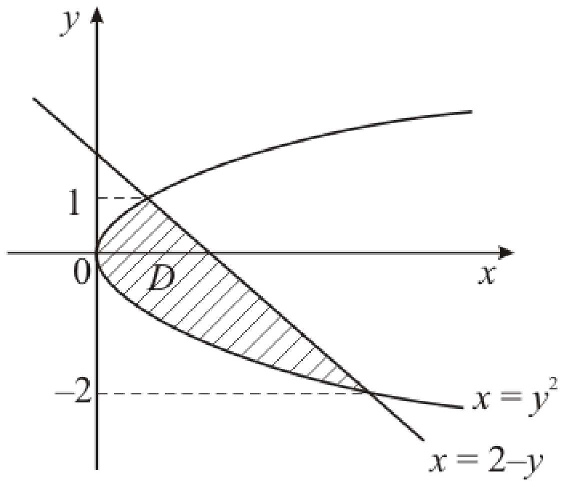


Рис. 8

Из рис. 8 заключаем, что область D относится к случаю II, и ее можно описать неравенствами:

$$D:\begin{cases} -2 \le y \le 1, \\ y^2 \le x \le 2 - y\ . \end{cases}$$

По формуле (13) получим:

$$\iint\limits_D xydxdy = \int\limits_{-2}^{1} dy \int\limits_{y^2}^{2-y} xydx = \int\limits_{-2}^{1} dy\, y \int\limits_{y^2}^{2-y} xdx = \int\limits_{-2}^{1} dyy\, \frac{x^2}{2}\Big|_{y^2}^{2-y} =$$

$$== \int\limits_{-2}^{1} dy\, y\left(\frac{(2-y)^2}{2} - \frac{y^4}{2}\right) = \int\limits_{-2}^{1} dyy\left(\frac{4 - 4y + y^2}{2} - \frac{y^4}{2}\right) =$$

$$= \int\limits_{-2}^{1} dy\, y\left(2 - 2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{2}\right) = \int\limits_{-2}^{1}\left(2y - 2y^2 + \frac{y^3}{2} - \frac{y^5}{2}\right)dy =$$

$$= \left(y^2 - \frac{2y^3}{3} + \frac{y^4}{8} - \frac{y^6}{12}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{8} - \frac{1}{12} - \left(4 + \frac{16}{3} + 2 - \frac{16}{3}\right) =$$

$$= 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{8} - \frac{1}{12} - 6 = -5\frac{5}{8}.$$

Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальным уравнением (ДУ) 1-го порядка называется уравнение вида:

$$y' = f(x,y), \tag{1}$$

связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию $y = y(x)$ и ее первую производную y'. Здесь $f(x, y)$ — некоторая заданная функция своих аргументов, определенная и непрерывная в области D на плоскости XOY. Область D называется областью определения уравнения (ООУ).

Функция $y = \varphi(x)$, определенная и дифференцируемая на некотором интервале (a, b), называется *решением уравнения* (1), если, будучи подставленной в это уравнение, она обращает его в тождество, т. е. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, при $x \in (a, b)$. График решения ДУ называется *интегральной кривой*.

ДУ (1) имеет бесчисленное множество решений вида $y = \varphi(x, C)$, зависящих от одной произвольной постоянной C. Такое решение называется *общим решением ДУ*. Решение ДУ (1), которое получается из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при фиксированном значении C, называется *частным решением*.

Не всегда решение ДУ (1) находится в виде $y = \varphi(x)$, иногда оно получается в неявном виде $\Phi(x,y) = 0$, при этом для всех x и y из некоторой области должно выполняться — $\dfrac{\Phi'_x(x,y)}{\Phi'_y(x,y)} = f(x,y)$. Решение $\Phi(x,y) = 0$ называют интегралом ДУ (1), а уравнение $\Phi(x,y,C) = 0$ называется *общим интегралом* ДУ (1) в некоторой области $G \in D$, если при надлежащем выборе постоянной C оно дает любое решение ДУ (1), график которого содержится в области G.

Нахождение всех решений ДУ называется *интегрированием* уравнения.

Далее рассмотрим методы интегрирования основных типов ДУ 1-го порядка.

Уравнения с разделяющимися переменными

Такие ДУ имеют вид:

$$y' = f_1(x)\cdot f_2(y) \tag{2}$$

и решаются следующим образом: так как $y' = \frac{dy}{dx}$, то уравнение (2) можно записать в виде $\frac{dy}{dx} = f_1(x)\cdot f_2(y)$. Разделим переменные в полученном равенстве, т. е. при дифференциале dy соберем множителями функции, зависящие от y, а при дифференциале dx — функции, зависящие от x. Для этого умножим обе части уравнения (2) на множитель $\frac{dx}{f_2(y)}$, считая $f_2(y)\neq 0$. Символически это записывается так:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)\cdot f_2(y) \quad \Big| \cdot \frac{dx}{f_2(y)} \quad \left(f_2(y)\neq 0\right).$$

Получим $\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$. Интегрируя последнее равенство, получим общий интеграл

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C.$$

В случае, если уравнение $f_2(y)=0$ имеет решение $y = b$, которое не получается из общего решения ни при каком значении постоянной C, то $y = b$ является особым решением уравнения (2).

Задание 4.1. Найти общее решение ДУ

$$\sqrt[4]{x}\cdot y' = y+1.$$

Решение. ДУ приведем к виду (2), разделив обе части равенства на $\sqrt[4]{x}$:

$$y' = \frac{y+1}{\sqrt[4]{x}}, \quad \text{ООУ} \quad x\neq 0.$$

Согласно описанному выше алгоритму, заменив y' на $\dfrac{dy}{dx}$, получим $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y+1}{\sqrt[4]{x}}$ и умножим обе части равенства на $\dfrac{dx}{y+1}(y+1\neq 0)$:

$$\frac{dy}{y+1}=\frac{dx}{\sqrt[4]{x}}. \qquad (3)$$

Проинтегрируем полученное равенство:

$$\int\frac{dy}{y+1}=\left|\begin{matrix}u=y+1\\ du=dy\end{matrix}\right|=\int\frac{du}{u}=\left|\begin{matrix}\text{формула 4}\\ \text{таблицы}\\ \text{интегралов}\end{matrix}\right|=\ln|u|+C=\ln|y+1|+C.$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x}}=\int x^{-\frac{1}{4}}dx=\left|\begin{matrix}\text{формула 3}\\ \text{таблицы}\\ \text{интегралов}\end{matrix}\right|=\frac{x^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1}+C=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+C.$$

Для удобства таблица основных интегралов приведена в приложении 1.

Вернемся к равенству (3), оставив константу C только в правой части в виде $\ln|C_1|$:

$$\ln|y+1|=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+\ln C_1.$$

Используя свойства логарифмов, получим: $y+1=C_1e^{\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}}\Rightarrow y=C_1e^{\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}}-1$ — общее решение исходного ДУ.

Проверим, имеет ли уравнение особые решения. Уравнение делили на $y + 1$, поэтому могли потерять решение $y = -1$. Подстановка в уравнение показывает, что $y = -1$ — решение, однако оно содержится в общем решении при $C_1 = 0$. Таким образом, особых решений нет.

Однородные уравнения

Однородные ДУ 1-го порядка имеют вид:

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (4)$$

Это уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными при помощи замены $y=zx$, где $z=z(x)$. Действительно, подставляя в уравнение (4) $y' = z'x + z,$ получаем: $z'x + z = f(z)$ — уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, получим

$$\frac{dz}{dx}x = f(z) - z \left| \cdot \frac{dx}{(f(z) - z) \cdot x}, \quad f(z) - z \neq 0, \quad x \neq 0, \right.$$

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dz}{f(z) - z} = \ln|x| + C.$$

После вычисления интеграла вместо z нужно подставить $\frac{y}{x}$ и, если можно, упростить полученное выражение.

Задание 4.2. Найти общее решение ДУ

$$xy' = y + \frac{x}{\ln\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Решение. Разделим уравнение на $x \neq 0$ (x = 0 не принадлежит ООУ) и получим: $y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{\ln\left(\frac{y}{x}\right)}$ — однородное уравнение вида (4) в котором $f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} + \frac{1}{\ln\left(\frac{y}{x}\right)}.$

Делаем замену $y = z \cdot x, \; z' = z'x + z.$ Тогда исходное уравнение становится уравнением с разделяющимися переменными:

$$z' \cdot x + z = z + \frac{1}{\ln z}, \quad \frac{dz}{dx}x = \frac{1}{\ln z} \left| \cdot \frac{dx \cdot \ln z}{x}, \right.$$

$$\ln z dz = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \ln z dz = \int \frac{dx}{x}.$$

Найдем интегралы в левой и правой частях полученного равенства:

$$\int \ln z dz = \left| \begin{array}{l} \text{используем формулу интегрирования} \\ \text{по частям } \int u dv = uv - \int v du, \\ \text{где } u = \ln z \to du = \dfrac{dz}{z} \\ dv = dz \to v = z \end{array} \right| = z \ln z - \int z \frac{dz}{z} = z \ln z - z + C.$$

$$\int \frac{dx}{x} = \left| \begin{matrix} \text{формула 4} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{matrix} \right| = \ln|x| + C.$$

Итак, получим:

$z \ln z - z = \ln|x| + C \Rightarrow \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x} - \frac{y}{x} = \ln|x| + C$ — общий интеграл исходного ДУ.

Линейные уравнения

Линейные ДУ 1-го порядка имеют вид:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x), \tag{5}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — известные функции, непрерывные на некотором интервале. Такие уравнения обычно решают методом Бернулли, который состоит в следующем. Решение ищется в виде произведения двух функций $y(x) = U(x)V(x)$. Тогда $y' = U'V + UV'$. Подставляя y и y' в (5), получим:

$$U'V + UV' + p(x)UV = q(x).$$

Объединим второе и третье слагаемые в левой части последнего уравнения, вынося U за скобки, и получим:

$$U'V + U(V' + p(x)V) = q(x). \tag{6}$$

Поскольку одну неизвестную функцию y заменили двумя функциями U и V, то одну из этих функций можем взять произвольно. Выберем функцию $V(x)$ так, чтобы она была решением уравнения

$$V' + p(x)V = 0, \tag{7}$$

тогда вторая функция $U(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$U'V = q(x). \tag{8}$$

Решив уравнение с разделяющимися переменными (7), найдем V и подставим его в (8), откуда найдем U. Общее решение получим как произведение найденных функций U и V:

$$y = UV.$$

Задание 5.1. Найти общее решение ДУ:

$$y' + 2y = e^{-x}$$

Решение. Уравнение имеет вид (5), поэтому является линейным. Решим его методом Бернулли. Сделаем замену $y = UV$, $y' = U'V + UV'$:

$$U'V + UV' + 2UV = e^{-x},$$
$$U'V + U(V' + 2V) = e^{-x}.$$

Приравняем коэффициент при U к нулю и получим: $\begin{cases} V' + 2V = 0, \\ U'V = e^{-x}. \end{cases}$

Решим первое из полученных уравнений:

$\dfrac{dV}{dx} = -2V \left| \cdot \dfrac{dx}{V} \right. \Rightarrow \int \dfrac{dV}{V} = -2\int dx \Rightarrow \ln|V| = -2x \Rightarrow V = e^{-2x}$ (при интегрировании использовали формулы 4 и 2 таблицы интегралов). При нахождении V постоянную C полагаем равной нулю, так как в данном случае достаточно найти некоторое решение.

Полученную функцию $V = e^{-2x}$ подставим во второе уравнение:

$U'e^{-2x} = e^{-x} \Rightarrow U' = e^{x} \Rightarrow \dfrac{dU}{dx} = e^{x} \left| \cdot dx \right. \Rightarrow \int dU = \int e^{x} dx \Rightarrow U = e^{x} + C$ (использовали формулы 2 и 7 таблицы интегралов).

Таким образом, $y = UV = \left(e^{x} + C\right)e^{-2x}$ или $y = e^{-x} + Ce^{-2x}$ — общее решение исходного ДУ.

Уравнения Бернулли

Уравнения Бернулли имеют вид:

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \quad \text{где } \alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1. \tag{9}$$

Метод решения таких уравнений тот же, что и для линейных уравнений.

Пример. Найти общее решение ДУ: $xy' + 2y = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$.

Решение. Разделим уравнение на $x \neq 0$ ($x = 0$ не является решением данного ДУ):

$$y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{x\cos^2 x}.$$

Полученное уравнение имеет вид (9), следовательно, это уравнение Бернулли. Сделаем замену $y = UV$, $y' = U'V + UV'$. Получим:

$$U'V+UV'+\frac{2UV}{x}=\frac{2\sqrt{UV}}{x\cos^2 x},$$
$$U'V+U\left(V'+\frac{2V}{x}\right)=\frac{2\sqrt{UV}}{x\cos^2 x}.$$

Приравняем коэффициент при U нулю и получим: $\begin{cases} V'+\dfrac{2V}{x}=0, \\ U'V=\dfrac{2\sqrt{UV}}{x\cos^2 x}. \end{cases}$

Решим первое уравнение:

$$\frac{dV}{dx}=-\frac{2V}{x}\left|\cdot\frac{dx}{V}\Rightarrow\int\frac{dV}{V}=-2\int\frac{dx}{x}\Rightarrow\ln|V|=-2\ln|x|\Rightarrow V=x^{-2}\Rightarrow V=\frac{1}{x^2}\right.$$

(использовали формулу 4 таблицы интегралов).

Подставим полученную функцию V во второе уравнение:

$$U'\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{2\sqrt{\frac{U}{x^2}}}{x\cos^2 x}\Rightarrow\frac{U'}{x^2}=\frac{2\sqrt{U}}{x^2\cos^2 x}\bigg|\cdot x^2\Rightarrow U'=\frac{2\sqrt{U}}{\cos^2 x}\Rightarrow\frac{dU}{dx}=\frac{2\sqrt{U}}{\cos^2 x}\bigg|\cdot\frac{dx}{2\sqrt{U}}\left(\sqrt{U}\neq 0\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{1}{2}\int\frac{dU}{\sqrt{U}}=\int\frac{dx}{\cos^2 x}\Rightarrow\sqrt{U}=\mathrm{tg}x+C\Rightarrow U=\left(\mathrm{tg}x+C\right)^2$$

(использовали формулы 3*а* и 9 таблицы интегралов).

Таким образом, общее решение ДУ:

$$y=\frac{\left(\mathrm{tg}x+C\right)^2}{x^2}.$$

Случай $V = 0$ и $\Rightarrow y = 0$ является решением ДУ, и так как оно не может быть получено из общего решения, то является особым решением.

Все рассмотренные типы ДУ 1-го порядка и методы их решения включены в таблицу ДУ 1-го порядка (см. прил. 2).

Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка

Задача Коши для ДУ 1-го порядка состоит в следующем: из общего решения $y=\varphi(x,C)$ требуется выделить такое решение $y=\varphi(x,C_0)$ уравнения (1), которое удовлетворяет начальному условию: $\varphi(x_0)=y_0$, где (x_0,y_0) — заданная точка плоскости XOY. Условия существования и единственности решения задачи Коши сформулированы в следующей теореме.

Теорема. *Если функция* $y = f(x, y)$ *определена и непрерывна в некоторой области D на плоскости XOY, а частная производная* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *ограничена в этой области, то каковы бы ни были числа* x_0, y_0, *такие, что точка* $M(x_0, y_0) \in D$, *найдется единственная функция* $y = \varphi(x)$, *являющаяся решением уравнения (1), непрерывно дифференцируемая на некотором промежутке, содержащем точку* x_0, *и такая, что* $\varphi(x_0) = y_0$.

Задание 5.2. Определить тип ДУ и решить задачу Коши

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} - xy' = 0, \quad y(3) = 4.$$

Решение. Для определения типа ДУ выразим из уравнения y':

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}, \quad (x \neq 0).$$

Внесем x под знак корня, возведя его в квадрат: $y' = \dfrac{y}{x} + \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{x^2}}$

и в подкоренном выражении поделим почленно числитель на знаменатель, получим

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \qquad (10)$$

Итак, привели уравнение к виду $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$. По таблице ДУ (см. прил. 2) определяем, что уравнение однородное и решается заменой $z = \dfrac{y}{x}$, $y = zx$, $y' = z'x + z$. Сделаем замену в уравнении (10): $z'x + z = z + \sqrt{1 + z^2}$, учтем, что $z' = \dfrac{dz}{dx} \Rightarrow \dfrac{dz}{dx} x = \sqrt{1 + z^2} \Big| \cdot \dfrac{dx}{x\sqrt{1 + z^2}}$, $\left(\sqrt{1 + z^2} \neq 0\right)$, $\dfrac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \dfrac{dx}{x}$.

Используя формулы 12 и 4 таблицы интегралов, получаем:

$$\ln\left|z + \sqrt{1 + z^2}\right| = \ln|x| + \ln C.$$

Произвольную постоянную интегрирования выразили в виде $\ln C$, что позволило записать общее решение, используя свойства логарифмов, в виде:

$$z+\sqrt{1+z^2}=Cx.$$

Учитывая выполненную замену $z=\frac{y}{x}$, получим $\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=xC$ — общее решение ДУ в неявном виде.

Найдем такое решение, которое удовлетворяет начальному условию $y(3) = 4$. Для этого подставим в общее решение $x=3,\ y=4$ и найдем значение постоянной C:

$$\frac{4}{3}+\sqrt{1+\frac{16}{9}}=3C \Rightarrow \frac{4}{3}+\frac{5}{3}=3C \Rightarrow 3=3C \Rightarrow C=1.$$

Итак, нашли значение постоянной C, при котором решение ДУ будет удовлетворять указанному начальному условию.

Решение задачи Коши запишем, подставив в общее решение значение постоянной C:

$$\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=x.$$

Дифференциальные уравнения второго порядка

Дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее первую и вторую производные. В общем случае такое уравнение имеет вид:

$$F(x,y,y',y'')=0. \qquad (11)$$

Общее решение уравнения (11) должно содержать две произвольные постоянные, т. е. иметь вид $y=\varphi(x,C_1,C_2)$. Задача Коши для ДУ 2-го порядка формулируется таким образом: найти такое решение уравнения, которое удовлетворяло бы условиям $y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0$, где x_0, y_0, y'_0 — заданные числа.

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейные однородные ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами имеют вид:

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0, \qquad (15)$$

где p_1 и p_2 — действительные числа.

Согласно теореме о структуре общего решения линейного однородного ДУ достаточно найти два линейно независимых частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (15), чтобы записать общее решение:

$$y_{00}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Будем искать решение уравнения (15) в виде $y = e^{\lambda x}$, где λ — некоторое постоянное. Чтобы определить λ, подставим y, y', y'' в уравнение (15). В результате подстановки получим уравнение $e^{\lambda x}\left(\lambda^2 + p_1\lambda + p_2\right) = 0.$

Так как $e^{\lambda x} \neq 0$, то

$$\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0. \qquad (16)$$

Квадратное уравнение (16) называют *характеристическим уравнением* для ДУ (15), а его корни λ_1 и λ_2 *характеристическими числами*. При решении характеристического уравнения (16) могут возникнуть три случая:

а) Корни λ_1 и λ_2 действительные и различные. Тогда общее решение уравнения (15) будет иметь вид:

$$y_{00} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}. \qquad (17)$$

б) Корни λ_1 и λ_2 действительные и равные, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda.$ Общее решение уравнения (15) будет иметь вид:

$$y_{00} = e^{\lambda x}\left(C_1 + C_2 x\right). \qquad (18)$$

в) Корни λ_1 и λ_2 комплексно сопряженные, $\lambda_{1,2} = a \pm ib.$ Тогда общее решение уравнения (15) примет вид:

$$y_{00} = e^{ax}\left(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx\right). \qquad (19)$$

Задание 6. Найти общие решения линейных однородных ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами:

а) $4y''+9y'+2y=0;$ $y''-10y'+25y=0;$ в) $y''-2y'+17y=0;$

Решение.

а) $4y''+9y'+2y=0.$ Составим характеристическое уравнение:

$$4\lambda^2+9\lambda+2=0.$$

Решим его, используя формулу корней квадратного уравнения:

$$a\lambda^2+b\lambda+C=0,\ \ \lambda_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{20}$$

Получим корни:

$$\lambda_{1,2}=\frac{-9\pm\sqrt{9^2-4\cdot4\cdot2}}{2\cdot4}=\frac{-9\pm\sqrt{49}}{8}=\frac{-9\pm7}{8};$$
$$\lambda_1=\frac{-9-7}{8}=-2,\quad \lambda_2=\frac{-9+7}{8}=-\frac{1}{4}.$$

Поскольку $\lambda_1,\ \lambda_2\in R$ и $\lambda_1\neq\lambda_2,$ то общее решение запишем в виде (17):

$$y_{00}=C_1e^{-2x}+C_2e^{-\frac{x}{4}}.$$

б) $y''-10y'+25y=0.$

Характеристическое уравнение: $\lambda^2-10\lambda+25=0,$

его корни найдем по формулам (20):

$$\lambda_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{10^2-4\cdot1\cdot25}}{2}=\frac{10\pm0}{2}=5.$$

Поскольку $\lambda_1=\lambda_2=\lambda\in R,$ то общее решение запишем в виде (18):

$$y_{00}=e^{5x}\left(C_1+C_2x\right).$$

в) $y''-2y'+17y=0.$

Характеристическое уравнение: $\lambda^2-2\lambda+17=0,$

его корни найдем по формуле (20):

$$\lambda_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot17}}{2\cdot1}=\frac{2\pm\sqrt{-64}}{2}=\frac{2\pm8i}{2}=1\pm4i.$$

Получили комплексно сопряженные корни вида $\lambda_{1,2}=a\pm ib,$ где a = 1, b = 4.

Решение запишем в виде (19):

$$y_{00}=e^{x}\left(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x\right).$$

Пример 7.1. Решить задачу Коши:

$$y''+9y'=0,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=-3.$$

Решение. Характеристическое уравнение: $\lambda^2+9=0.$

Решим его: $\lambda^2=-9;\quad \lambda_{1,2}=\pm\sqrt{-9};\quad \lambda_{1,2}=\pm 3i.$

$\lambda_{1,2}$ — комплексно сопряженные корни вида $\lambda_{1,2}=a\pm ib,$ где a = 0, b = 3. Решение запишем в виде (19), при этом учтем, что $e^0=1$:

$$y_{00}=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x.$$

Найдем константы C_1 и C_2, для этого продифференцируем полученное общее решение:

$$y'_{00}=-3C_1\sin 3x+3C_2\cos 3x.$$

Подставив начальные данные x = 0, $y=2,\ y'=-1$, получим

$$\begin{cases}-3=-3\cdot C_1\sin 3\cdot 0+3C_2\cos 3\cdot 0,\\ 2=C_1\sin 3\cdot 0+C_2\cos 3\cdot 0.\end{cases}\qquad \begin{cases}C_1=-1,\\ C_2=2.\end{cases}$$

Итак, решение задачи Коши:

$$y=-\cos 3x+2\sin 3x.$$

Уравнения, допускающие понижение порядка

Основным способом интегрирования ДУ (11) является понижение порядка. Рассмотрим один из случаев, когда это возможно. Если уравнение (11) имеет вид:

$$y''=f\left(x\right), \tag{12}$$

т. е. правая часть не содержит y и y', то ДУ решаются двукратным последовательным интегрированием:

$$y=\int\left(\int f\left(x\right)dx\right)dx+C_1x+C_2.$$

Пример 7.2. Решить задачу Коши:

$$y''=\cos^2 2x,\quad y(0)=\frac{1}{16},\quad y'(0)=1.$$

Решение. Найдем сначала y'

$$y' = \int \cos^2 2x\,dx = \left| \begin{array}{l} \text{используем формулу} \\ \text{понижения степени:} \\ \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha) \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int(1+\cos 4x)\,dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 4x\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{для второго} \\ \text{интеграла замена} \\ u = 4x,\ du = 4dx \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int \cos u\,du = \left| \begin{array}{l} \text{используем формулы 1 и 7} \\ \text{таблицы интегралов} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x + C_1.$$

Итак, получим $y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x + C_1.$ (13)

Найдем y интегрированием уравнения (13):

$$y = \int\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x + C_1\right)dx = \frac{1}{2}\int x\,dx + \frac{1}{8}\int \sin 4x\,dx +$$
$$+ C_1\int dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{1}{32}\cos 4x + C_1 x + C_2.$$

Получим общее решение:

$$y = \frac{x}{4} - \frac{1}{32}\cos 4x + C_1 x + C_2. \qquad (14)$$

Найдем константы C_1 и C_2, подставив начальные данные $x = 0$, $y = \frac{1}{16}$, $y' = 1$ в формулы (13) и (14):

$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{8}\sin 4\cdot 0 + C_1, \\ \frac{1}{16} = \frac{0^2}{4} - \frac{1}{32}\cos 4\cdot 0 + C_1\cdot 0 + C_2. \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = C_1, \\ \frac{1}{16} = -\frac{1}{32} + C_2. \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = \frac{3}{32}. \end{cases}$$

Итак, решение задачи Коши:

$$y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{32}\cos 4x + x + \frac{3}{32}.$$

Числовой ряд и его сходимость. Необходимое условие сходимости ряда

Числовым рядом называется выражение вида:

$$u_1+u_2+\ldots+u_k+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}u_k,$$

$u_k=f(k)$ называется *общим членом ряда.*

Сумма конечного числа n первых членов ряда называется *n-ой частичной суммой ряда*:

$$S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n=\sum_{k=1}^{n}u_k.$$

Ряд $u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k$ называется *n-м остатком ряда* $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$.

Ряд называется *сходящимся*, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм: $\lim_{n\to\infty}S_n=S$. Число S называется *суммой ряда*. При этом пишут $\sum_{k=1}^{\infty}u_k=S$. Если предел частичных сумм равен бесконечности, т.е. $\lim_{n\to\infty}S_n=\pm\infty$, или не существует, то ряд называется *расходящимся*.

Рассмотрим ряд из членов геометрической прогрессии (геометрический ряд):

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a\cdot q^n.$$

Сумма первых n членов геометрической прогрессии вычисляется по формуле $S_n=a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}=\dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$, если $q\neq1$. Если $|q|<1$, то $\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{a}{1-q}$, т.е. ряд сходится и его сумма $S=\sum_{n=0}^{\infty}aq^n=\dfrac{a}{1-q}$. Если $|q|>1$,то ряд расходится: $\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$ в случае $q\geq1$ и не существует в случае $q\leq-1$.

Итак, геометрический ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ сходится тогда и только тогда, когда $|q|<1$, и его сумма $S=\dfrac{a}{1-q}$.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то его *n-й* член при $n\to\infty$ является бесконечно малой величиной, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Это необходимое условие сходимости ряда. Если же $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится (достаточный признак расходимости ряда).

Положительные ряды

Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называют *положительным*, если все члены ряда неотрицательны, т.е. $u_n \geq 0$ при любом n.

Теорема (критерий сходимости положительного ряда). Для того чтобы положительный числовой ряд сходился, необходимо и достаточно, чтобы его *n-я* частичная сумма была ограничена сверху, т.е. $S_n \leq M$.

Для исследования сходимости применяют достаточные признаки. Среди них часто используют признаки сравнения, Даламбера, радикальный и интегральный признаки Коши.

Признаки сравнения

Теорема (1-й признак сравнения). Пусть даны два положительных ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} V_n$ и пусть для всех *n* начиная с некоторого номера, выполняется $u_n \leq V_n$. Тогда

1) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} V_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ также сходится;

2) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} V_n$ также расходится.

Теорема (2-й признак сравнения). Если существует конечный, отличный от нуля предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{V_n}=c\left(c\neq 0, c\neq\infty\right)$, то ряды эквивалентны в смысле сходимости, т.е. оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

Для сравнения используются эталонные ряды:

а) геометрический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^n$, который сходится при $|q|<1$ и расходится при $|q|\geq 1$;

б) обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, который сходится при $p>1$ и расходится при $p\leq 1$. В случае $p=1$ ряд называют гармоническим.

При выборе рядов для сравнения полезно помнить следующие специальные пределы:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1;\ \lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}=1;\ \lim_{\alpha\to 0}\frac{\arcsin\alpha}{\alpha}=1;$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\alpha}{\alpha}=1;\ \lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=1.$$

Удобно также использовать неравенства:

1) $\sin\alpha<\alpha<\operatorname{tg}\alpha$, если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

2) $|\sin\alpha|\leq 1$; $|\cos\alpha|\leq 1$;

3) $\ln n<n$ для всех натуральных n и $\ln n>1$ при $n\geq 3$.

Признак Даламбера

Пусть для положительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ существует конечный предел $D=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Тогда, если $D<1$, то ряд сходится, если $D>1$ – ряд расходится, при $D=1$ – ничего определенного о сходимости или расходимости ряда утверждать нельзя.

Признак Даламбера используется, если в записи n-го члена ряда присутствует либо a^n наряду с n^p, либо факториал $n!$.

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{åñëè} \quad n = 0; \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, & \text{åñëè} \quad n > 0 \end{cases}$$ (читается «эн-факториал»).

Радикальный признак Коши

Пусть для положительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ существует конечный предел $K = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$. Тогда, если $K<1$, то ряд сходится, если $K>1$ – ряд расходится; при $K=1$ – ничего определенного о сходимости или расходимости ряда утверждать нельзя, нужно применить другой признак.

Задание 8. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+\ln n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{\sqrt[5]{n^4}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n+n}{2^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^{n+1}}{(2n-1)!}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n^2+1}{2n^2}\right)^{-n^3}$

Решение.

а) Для сравнения возьмем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$, который сходится как обобщенный гармонический ряд ($p=2>1$).

Поскольку $\dfrac{1}{n^2+\ln n} < \dfrac{1}{n^2}$ при $n > 1$, то по первому признаку сравнения исходный ряд также сходится.

б) Для сравнения возьмем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[5]{n^4}}$, который расходится как обобщенный гармонический ряд ($p=\dfrac{4}{5}<1$).

Применим 2-й признак сравнения:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{\sqrt[5]{n^4}}}{\dfrac{1}{\sqrt[5]{n^4}}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{\sqrt[5]{n^4}} \cdot \frac{\sqrt[5]{n^4}}{1} = \pi \neq 0 \text{ и } \neq \infty.$$

Следовательно, ряды эквивалентны в смысле сходимости, и значит, исходный ряд также расходится.

в) Для сравнения возьмем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n$, который расходится как геометрический ряд ($q=\frac{3}{2}>1$).

Поскольку $u_n=\frac{3^n+n}{2^n}>\left(\frac{3}{2}\right)^n=V_n$ для всех n , то по первому признаку сравнения исходный ряд также расходится.

г) Применим признак Даламбера. Общий член ряда $u_n=\frac{3^{n+1}}{(2n-1)!}$, $(n+1)$-й член ряда $u_{n+1}=\frac{3^{(n+1)+1}}{(2(n+1)-1)!}=\frac{3^{n+2}}{(2n+1)!}$.

Вычисляя предел $D=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$, получаем:

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+2}}{(2n+1)!}}{\frac{3^{n+1}}{(2n-1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+2}(2n-1)!}{3^{n+1}(2n+1)!}=3\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)2n\cdot(2n+1)}=$$

$=\frac{3}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n(2n+1)}=0<1.$ Согласно признаку Даламбера ряд сходится.

д) Используем радикальный признак Коши. Общий член ряда

$u_n=\left(\frac{2n^2+1}{2n^2}\right)^{-n^3}$. Найдем $K=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$:

$$K=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n^2+1}{2n^2}\right)^{-n^3}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+1}{2n^2}\right)^{-n^3/n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{-n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{2n^2}\right)^{-1/2}=e^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{e}}<1.$$

Следовательно, исследуемый ряд сходится.

<u>Замечание.</u> При решении использован второй замечательный предел $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e=2{,}718\ldots$

Знакопеременные ряды

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ имеют разные знаки, то такие ряды называют *знакопеременными.*

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *абсолютно сходящимся,* если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, составленный из абсолютных величин членов ряда. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *условно сходящимся,* если он сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, расходится.

Теорема. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, составленный из абсолютных величин членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, то сходится и данный ряд.

Числовые ряды, любые два соседних члена u_n и u_{n+1} (n=1,2,…) которых имеют противоположные знаки, называются *знакочередующимися.*

Признак Лейбница. Пусть члены знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$, ($u_n \geq 0$) таковы, что

1) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$,

2) $u_n \geq u_{n+1}$ для всех n, т.е. члены ряда из абсолютных величин монотонно убывают, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ сходится и для любого n=1,2,… выполняется неравенство $|S - S_n| \leq u_{n+1}$, где S_n – n-*я* частичная сумма , а S – сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$.

Алгоритм исследования знакочередующихся рядов $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$

1) Проверить выполнено ли необходимое условие сходимости ряда: если $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится, и исследование закончено.

2) Проверить ряд на абсолютную сходимость: если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится, то исследуемый ряд сходится абсолютно.

3) Если ряд не сходится абсолютно, то для исследования сходимости знакочередующегося ряда используют признак Лейбница. Если оба условия этого признака выполнены, то заключаем, что исследуемый ряд сходится условно.

Задание 9. Исследовать знакочередующиеся ряды на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{\sqrt{n^6+4n^5+3}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot \ln n}{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 7^n}{n^4}$

Решение.

а) Рассмотрим ряд из абсолютных величин членов данного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|=$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n\cdot n}{\sqrt{n^6+4n^5+3}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^6+4n^5+3}}.$$

Общий член этого ряда $|u_n|=\frac{n}{\sqrt{n^6+4n^5+3}}$.

Для сравнения возьмем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}V_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, который сходится как обобщенный гармонический ряд с показателем $p=2>1$.

Вычисляя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{V_n}$, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{V_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{\sqrt{n^6+4n^5+3}}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{\sqrt{n^6+4n^5+3}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^6}}}=1\neq 0 \text{ и } \neq\infty.$$

Следовательно, согласно второму признаку сравнения, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^6+4n^5+3}}$ тоже сходится.

Поскольку ряд, составленный из абсолютных величин членов исследуемого ряда, сходится, то исходный ряд сходится абсолютно.

б) Составляем ряд из абсолютных величин: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n\cdot\ln n}{n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ и исследуем его на сходимость, выбирая для сравнения гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится.

Поскольку $\frac{\ln n}{n}>\frac{1}{n}$ при $n\geq 3$, то по первому признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ также расходится. Это означает, что исследуемый знакочередующийся ряд не сходится абсолютно.

Переходим к исследованию на условную сходимость по признаку Лейбница:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\ln n)'}{n'}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

(При раскрытии неопределенности типа $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ использовали правило Лопиталя).

2) Проверим условие монотонного убывания членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ при возрастании номера *n*. Для этого рассмотрим функцию $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, определенную при $x>0$. Ее производная $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0$ при $x>e=2{,}718\ldots$, значит $f(x)$ монотонно убывает при $x>e$, в частности, при $n\geq 3$ выполняется $f(n)>f(n+1)$, следовательно, $|u_n|=\frac{\ln n}{n}>|u_{n+1}|=\frac{\ln(n+1)}{n+1}$.

Итак, оба условия признака Лейбница выполнены. Значит, исследуемый ряд сходится (условно).

в) Замечая, что необходимое условие сходимости ряда не выполняется $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7^n}{n^4}=\infty\right)$, заключаем, что данный ряд расходится.

$$\left(\lim_{n\to\infty} \frac{7^n}{n^4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{7^n \ln 7}{4n^3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{7^n (\ln 7)^2}{12n^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{7^n (\ln 7)^3}{24n} = \right.$$

$$\left. = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{7^n (\ln 7)^4}{24} = \left(\frac{\infty}{24}\right) = \infty \right).$$

Степенные ряды

Степенным рядом называется выражение вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

где x – независимая переменная; a_n , n=0,1,2,…, (коэффициенты ряда) – постоянные. При всяком фиксированном числовом значении x степенной ряд превращается в числовой, который либо сходится, либо расходится. Основная задача исследования степенного ряда – нахождение его области сходимости.

Областью сходимости степенного ряда называется множество всех значений x, для которых этот ряд сходится.

Число R >0 называется *радиусом сходимости* степенного ряда, если ряд сходится для всех x таких, что $|x| < R$, и расходится для всех x таких, что $|x| > R$.

Областью сходимости степенного ряда с переменной x является интервал (-R; R), возможно, дополненный одной или обеими концевыми точками.

Если ряд сходится лишь при x=0, считают R=0; если ряд сходится при любом x, то считают $R = +\infty$.

Радиус сходимости степенного ряда вычисляется по одной из формул:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \text{ или } R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Если имеется степенной ряд по степеням $(x - x_0)$, т.е. ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, то интервал сходимости ряда радиуса R имеет вид $(x_0 - R, \quad x_0 + R)$.

На концах интервала сходимости различные степенные ряды ведут себя по-разному, поэтому в этих точках требуются дополнительные исследования на сходимость для каждого конкретного ряда.

Алгоритм нахождения области сходимости степенного ряда.

1) Выписать коэффициент степенного ряда a_n и в зависимости от его вида вычислить радиус сходимости ряда R.

2) Если R=0, то степенной ряд сходится лишь в одной точке x=0 (или x=x_0); если $R=\infty$, то ряд сходится на всей числовой оси; если же $0< R<\infty$, то дополнительно исследуем еще две точки — концы интервала сходимости.

Задание 10. Найти область сходимости степенного ряда:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3x^n}{n!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}n^nx^n; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^nx^n}{2n+1}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{7^n}.$$

Решение.

а) Запишем ряд в виде $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}x^n$, ряд по степеням x, коэффициент ряда $a_n=\frac{n^3}{n!}$, следовательно $a_{n+1}=\frac{(n+1)^3}{(n+1)!}$.

Вычислим радиус сходимости ряда:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^3(n+1)!}{n!(n+1)^3}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\cdot n!(n+1)}{n!(n+1)^3}\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(n+1)^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}n=\infty.$$

$R=\infty$. Область сходимости исходного ряда — вся числовая ось, $x\in(-\infty;+\infty)$.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^nx^n$ - ряд по степеням x, a_n=n^n. Вычислим радиус сходимости ряда:

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}n}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0.$$

Ряд сходится в единственной точке x=0.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{2n+1}x^n$- ряд по степеням x, $a_n=\frac{(-3)^n}{2n+1}$; $a_{n+1}=\frac{(-3)^{n+1}}{2n+3}$.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-3)^n(2n+3)}{(2n+1)(-3)^{n+1}}\right|=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+1}=\frac{\infty}{\infty}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(2+\frac{3}{n}\right)}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{3};$$

$R=\frac{1}{3}$, интервал сходимости $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Исследуем сходимость ряда в граничных точках указанного интервала.

При $x=-\frac{1}{3}$ имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{\text{n}}}{2n+1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$. Он положительный, сравним его по второму признаку сравнения с расходящимся гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Получаем $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2n+1}:\frac{1}{n}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{2}$.

Следовательно, ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ эквивалентны в смысле сходимости, и значит, исследуемый ряд расходится и $x=-\frac{1}{3}$ не принадлежит области сходимости ряда.

При $x=\frac{1}{3}$ получаем знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n}{2n+1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Ряд из модулей его членов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$, как показано выше, расходится, т.е. абсолютной сходимости у знакочередующегося ряда нет. Исследуем ряд на условную сходимость по признаку Лейбница:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{2n+1}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{\infty} = 0$.

2) $|u_n| = \frac{1}{2n+1} > |u_{n+1}| = \frac{1}{2n+3}$.

Значит, ряд сходится условно, $x = \frac{1}{3}$ принадлежит области сходимости ряда. Итак, область сходимости исходного ряда полуинтервал $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]$.

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^n}(x-2)^n$ — ряд по степеням (x-x_0), x_0=2, $a_n = \frac{1}{7^n}$.

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{7^n}}} = 7.$$

Интервал сходимости (x_0-R; x_0+R), т.е. (2-7; 2+7) или (-5; 9).

Исследуем сходимость на концах интервала.

При x = –5 получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-5-2)^n}{7^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$. Он расходится по достаточному признаку расходимости, так как $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|(-1)^n\right| = 1 \neq 0$.

Следовательно, точка x=-5 не принадлежит области сходимости ряда.

При x=9 получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(9-2)^n}{7^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{7^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}1$, который также расходится.

Поэтому областью сходимости исследуемого степенного ряда является интервал (-5; 9).

Разложение функций в степенной ряд

Если функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности точки x=0, и все ее производные в этой окрестности ограничены одним числом: $|f^{(n)}(x)| \le M$, n = 0,1,2…, то она раскладывается в степенной ряд (ряд Маклорена):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

сходящийся в каждой точке этой окрестности к значению функции $f(x)$.

Приведем разложения в ряды Маклорена (степенные ряды) элементарных функций с указанием области сходимости соответствующих рядов.

1) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x\in(-\infty;+\infty)$.

2) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$,

$x\in(-\infty;+\infty)$.

3) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\;\; x\in(-\infty;+\infty)$.

4) $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n,\quad x\in(-1;1)$.

5) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},x\in(-1;1]$.

6) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots+$

$+\frac{\alpha(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots,\quad x\in(-1;1)$.

7) $\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$,

$x\in[-1;1]$

Пример 11. Разложить заданные функции в ряды по степеням (x-x_0) и указать области сходимости полученных рядов:

а) $f(x)=\sin^2x\cdot\cos^2x$; $\quad x_0=0$; $\qquad$ б) $f(x)=\frac{1}{x}$; $\quad x_0=2$.

Решение.

а) $f(x)=\sin^2x\cdot\cos^2x$. Преобразуем заданную функцию:

$$f(x)=\sin^2x\cdot\cos^2x=\frac{4\sin^2x\cdot\cos^2x}{4}=\frac{1}{4}\sin^2 2x=\frac{1}{8}(1-\cos 4x).$$

Используя разложение

$$\cos y=1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\frac{y^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{y^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^{2n}}{(2n)!},$$

$y\in(-\infty;+\infty)$, при y=4x, найдем:

$$1-\cos 4x=\frac{2^4\cdot x^2}{2!}-\frac{2^8\cdot x^4}{4!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{2^{4n}\cdot x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{4n}\cdot x^{2n}}{(2n)!},$$

$x\in(-\infty;+\infty)$.

Следовательно, $\sin^2 x\cdot\cos^2 x=\frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{4n}\cdot x^{2n}}{(2n)!}$, окончательно получаем:

$$\sin^2 x\cdot\cos^2 x=\frac{2^1\cdot x^2}{2!}-\frac{2^5\cdot x^4}{4!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2^{4n-3}\cdot x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2^{4n-3}\cdot x^{2n}}{(2n)!},\ x\in(-\infty;+\infty).$$

б) $f(x)=\frac{1}{x}$; x_0=2. Для того чтобы разложить функцию $f(x)$ в ряд по степеням (x-2), представим ее в виде:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2\left(1+\frac{x-2}{2}\right)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\left(-\frac{x-2}{2}\right)}\right).$$

Используя разложение $\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}t^n,\ t\in(-1;1)$,

при $t=-\frac{x-2}{2}$, получим:

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{x-2}{2}\right)}=1-\frac{x-2}{2}+\left(\frac{x-2}{2}\right)^2+\ldots+\left(-\frac{x-2}{2}\right)^n+\ldots=1-\frac{x-2}{2}+\frac{(x-2)^2}{2^2}-$$

$$-\frac{(x-2)^3}{2^3}+\ldots+(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^n}.$$

Область сходимости этого ряда определяется неравенством $\left|\frac{x-2}{2}\right|<1$, т.е. $|x-2|<2$ или $0<x<4$.

Следовательно, $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x-2)^n}{2^n}$, и окончательно получаем:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{x-2}{2^2}+\frac{(x-2)^2}{2^3}-\frac{(x-2)^3}{2^4}+\ldots+(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}.$$

Полученный ряд сходится при $x\in(0;4)$.

Ряды Фурье

Пусть функция $y=f(x)$ задана на отрезке $[-l;l]$ и имеет период $\mathrm{T}=2l$. Тригонометрическим рядом Фурье для функции $f(x)$ называется ряд вида:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \qquad (1)$$

a_0, a_n, b_n называются коэффициентами ряда и вычисляются по формулам

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx, \quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n=1,2,3\ldots,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n=1,2,3\ldots \qquad (2)$$

В тригонометрический ряд можно разложить функцию, удовлетворяющую определенным условиям, которые называются *условиями Дирихле.*

Функция $f(x)$ на отрезке $[-l;l]$ удовлетворяет условиям Дирихле, если

1) она непрерывна на этом отрезке или имеет на нем конечное число точек разрыва первого рода (т.е. в точках разрыва существуют конечные односторонние пределы, но они не равны между собой);

2) функция на отрезке или не имеет точек экстремума, или имеет их конечное число;

3) существуют односторонние пределы $\lim\limits_{x\to -l+0}f(x)$ и $\lim\limits_{x\to l-0}f(x)$.

Сходимость тригонометрического ряда, составленного для функции $f(x)$, определяется следующей теоремой.

Теорема Дирихле. Пусть функция $y = f(x)$ определена для $x \in (-\infty;+\infty)$, имеет период $\mathrm{T} = 2l$ и на отрезке $[-l;l]$ удовлетворяет условиям Дирихле. Тогда ее ряд Фурье сходится на всей числовой оси , т.е. имеет сумму $S(x)$.

При этом:

1) в точках непрерывности функции $f(x)$ он сходится к самой функции, т.е. $S(x) = f(x)$;
2) в точках разрыва функции x_0 сумма ряда равна полусумме односторонних пределов функции слева и справа, т.е. $S(x_0) = \frac{1}{2}\left[\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)\right] = \frac{1}{2}\left[f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)\right]$;
3) на концах отрезка $[-l;l]$ сумма ряда определяется формулой:

$$S(-l) = S(l) = \frac{1}{2}\left[\lim_{x \to -l+0} f(x) + \lim_{x \to l-0} f(x)\right] = \frac{1}{2}\left[f(-l+0) + f(l-0)\right].$$

Для четной функции $f(x) = f(-x)$ все коэффициенты b_n=0, и ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}, \qquad (3)$$

где $a_0 = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)dx$, $a_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$ n=1,2…,

т.е. четная функция разлагается в ряд Фурье только по косинусам.

Для нечетной функции $f(-x) = -f(x)$ a_0=0, все a_n=0. Тогда

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \ n = 1,2,3... \qquad (4)$$

Таким образом, нечетная функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье толь-ко по синусам. Функцию $f(x)$, заданную на интервале $(0,l)$ можно произ-вольно продолжить на интервал $(-l,0)$, или как четную, или как нечетную, а затем разложить в неполный ряд Фурье, содержащий только косинусы или только синусы.

Алгоритм разложения функции $f(x)$, заданной графически на интервале (0,l), в неполный ряд Фурье

1) задать аналитически $f(x)$ на $(0, l)$;

2) доопределить функцию на $(-l,0)$ четным или нечетным образом;

3) проверить выполнение условий Дирихле на $(-l,l)$;

4) определить коэффициенты ряда Фурье для полученной функции и записать ряд Фурье;

5) определить сумму ряда $S(x)$ для $x \in [-l;l]$.

Задание 12. Функцию $f(x)$, заданную графически, разложить в ряд Фурье:

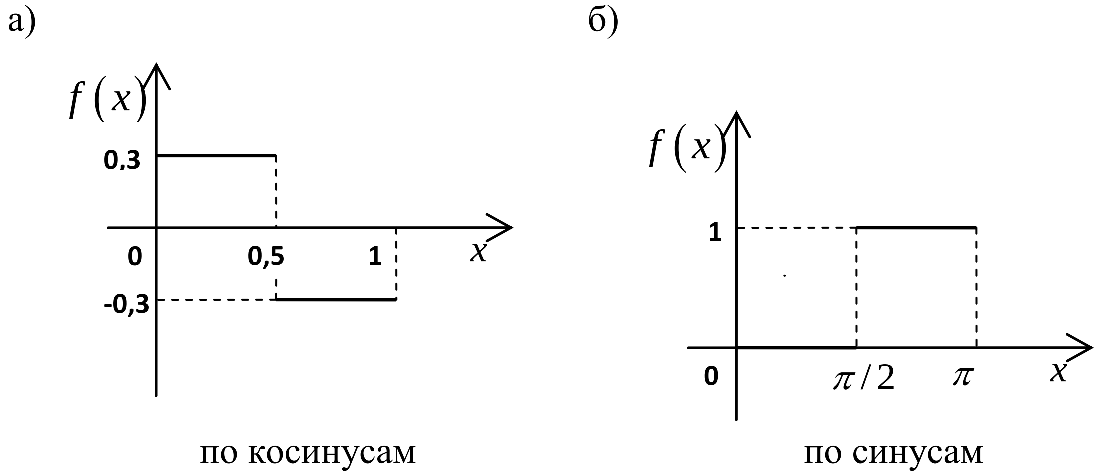


Рис. 1

Решение.

а) Функция, заданная графически на рис. 1а), аналитически описывается следующим образом:

$$f(x)= \begin{cases} 0{,}3,\ при\ 0 < x < 0{,}5, \\ -0{,}3,\ при\ 0{,}5 < x < 1. \end{cases}$$

Чтобы получить разложение данной функции в ряд Фурье, содержащий только косинусы, продолжаем ее на соседний слева интервал $(-1{,}0]$ четным образом (рис.2).

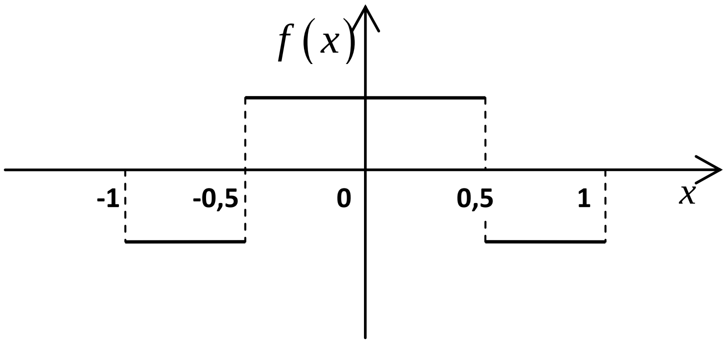


Рис. 2

Полученная функция на $(-l,l)$ удовлетворяет условиям Дирихле: она имеет две точки разрыва первого рода x_1=-0,5 и x_2=0,5 и не имеет точек экстремума, поэтому ее можно разложить в сходящийся ряд Фурье. При этом b_n=0, и по формуле (3), подставляя l=1, $f(x)$=0,3 в интервале (0;0,5) и $f(x)$=-0,3 в интервале (0,5;1), найдем

$$a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\cos\frac{n\pi x}{1}dx = 2\left(\int_0^{0,5} 0{,}3\cos n\pi x dx - \int_{0,5}^{1} 0{,}3\cos n\pi x dx\right) =$$

$$=0{,}6\left(\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\bigg|_0^{0,5} - \frac{\sin n\pi x}{n\pi}\bigg|_{0,5}^{1}\right) = \frac{0{,}6}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{2} - \sin 0 - \sin n\pi + \sin\frac{n\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{1{,}2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}, \quad n \neq 0.$$

Использовали $\sin 0 = 0$, $\sin n\pi = 0$ для $n = 1,2,3...$

Если n четное, т.е. n=2k, $k \in N$, то $\sin\frac{n\pi}{2} = \sin \pi k = 0$, т.е. a_n=0 для четных номеров n.

Если n нечетное, т.е. n=2k-1, $k \in N$, то

$$a_n = \frac{1{,}2}{(2k-1)\pi}\sin\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1{,}2}{(2k-1)\pi}\cos\pi k = (-1)^{k+1}\frac{1{,}2}{(2k-1)\pi},$$

т.к. по формулам приведения $\sin\left(\frac{\pi}{2} - k\pi\right) = \cos k\pi$, а $\cos k\pi = (-1)^k,\ k \in N$.

При n=0 по формуле для a_0 получим:

$$a_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)dx = 2\left(\int_0^{0,5} 0{,}3dx - \int_{0,5}^{1} 0{,}3dx\right) = 0{,}6\left(x\Big|_0^{0,5} - x\Big|_{0,5}^{1}\right) = 0{,}6(0{,}5 - 1 + 0{,}5) = 0.$$

Следовательно, искомое разложение данной функции в неполный ряд Фурье, содержащий только косинусы, следующее:

$$f(x) \sim \frac{1{,}2}{\pi}\left[\frac{\cos\pi x}{1}-\frac{\cos 3\pi x}{3}+\frac{\cos 5\pi x}{5}-\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{\cos(2n-1)\pi x}{2n-1}+\ldots\right]=$$
$$=\frac{1{,}2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{2n-1}.$$

По теореме Дирихле полученный ряд сходится на всей числовой оси, При этом для суммы этого ряда $S(x)$ выполняется

1. $S(x)= f(x)$ во всех точках непрерывности функции $f(x)$, т.е. при $x\in(0;0{,}5)\cup(0{,}5;1)$, и в разложении функции знак ~ можно заменить на знак =.
2. Определим $S(x)$ в точках разрыва x_1=-0,5, x_2=0,5.

$$S(-0{,}5)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to-0{,}5-0} f(x)+\lim_{x\to-0{,}5+0} f(x)\right]=\frac{1}{2}\left[f(-0{,}5-0)+f(-0{,}5+0)\right]=\frac{1}{2}\left[-0{,}3+0{,}3\right]=0$$
$$S(0{,}5)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to0{,}5-0} f(x)+\lim_{x\to0{,}5+0} f(x)\right]=\frac{1}{2}\left[f(0{,}5-0)+f(0{,}5+0)\right]=\frac{1}{2}\left[0{,}3-0{,}3\right]=0$$

3. На концах интервала, в точках $x=-l$ и $x=l$, $l=1$ имеем

$$S(-1)=S(1)=\frac{1}{2}\left[f(-1+0)+f(1-0)\right]=\frac{1}{2}\left[-0{,}3-0{,}3\right]=-0{,}3.$$

б) Функция, заданная графически на рис. 1б), аналитически описывается следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases}0, \ \textit{если} \ \ 0<x<\dfrac{\pi}{2}\\ 1, \ \textit{если} \ \dfrac{\pi}{2}<x<\pi\end{cases}.$$

Чтобы получить разложение данной функции в ряд Фурье, содержащий только синусы, продолжим ее на $(-\pi;0]$ нечетным образом (рис 3).

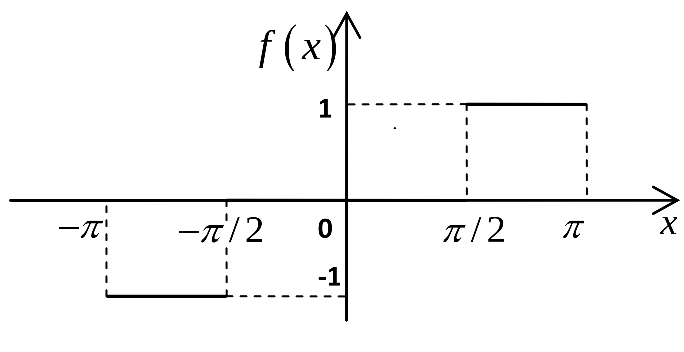


Рис. 3

Полученная функция на $(-\pi;\pi)$ удовлетворяет условиям Дирихле: имеет две точки разрыва первого рода $x_1=-\frac{\pi}{2}$, $x_2=\frac{\pi}{2}$ и не имеет точек экстремума, поэтому ее можно разложить в ряд Фурье, сходящийся на всей числовой оси.

Функция нечетная, поэтому a_n=0, n=0,1,2,…; b_n вычислим по формуле (4), подставляя $l=\pi$, $f(x)=0$ в интервале $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ и $f(x)=1$ в интервале $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\pi}dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}0\cdot\sin nxdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}1\cdot\sin nxdx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)=-\frac{2}{\pi n}\left(\cos\pi n-\cos\frac{\pi n}{2}\right)=-\frac{2}{\pi n}\left((-1)^n-\cos\frac{\pi n}{2}\right),$$

n=1,2,3,… .

Следовательно, ряд Фурье для функции имеет вид:

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n-\cos\frac{\pi n}{2}}{n}\right)\sin nx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\sin x-\sin 2x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}-\frac{2\sin 6x}{6}+\ldots\right).$$

По теореме Дирихле полученный ряд сходится на всей числовой оси и имеет сумму $S(x)$. При этом:

1. $S(x)=f(x)$ для $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ и в разложении знак ~ можно заменить на знак =.

2. В точках разрыва $x_1=-\frac{\pi}{2}$ и $x_2=\frac{\pi}{2}$ сумма ряда равна:

$$S\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[f\left(-\frac{\pi}{2}-0\right)+f\left(-\frac{\pi}{2}+0\right)\right]=\frac{1}{2}[-1+0]=-0{,}5,$$

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{\pi}{2}-0\right)+f\left(\frac{\pi}{2}+0\right)\right]=\frac{1}{2}[0+1]=0{,}5.$$

3. На концах интервала в точках $x=-\pi$, $x=\pi$ имеем

$$S(-\pi)=S(\pi)=\frac{1}{2}\left[f(-\pi+0)+f(\pi-0)\right]=\frac{1}{2}[-1+1]=0.$$

Теоретические вопросы

Раздел 1. Интегральное исчисление

1. Интегральная сумма. Определение определенного интеграла и его геометрический смысл. Свойства определенного интеграла. Теорема о среднем. Формула Ньютона–Лейбница.
2. Площадь криволинейной трапеции и криволинейного сектора.
3. Объем тела вращения вокруг оси ОХ.
4. Двойной интеграл, выражение его через повторный интеграл. Геометрический и механический смысл двойного интеграла.

Раздел 2. Дифференциальные уравнения

1. Понятие дифференциального уравнения (ДУ) и его порядка. Понятие общего и частного решений. ДУ с разделяющимися переменными.
2. ДУ 1-го порядка в однородных функциях. Линейные ДУ первого порядка. Уравнение Бернулли. Понижение порядка ДУ.
3. Линейные ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами

Раздел 3. Ряды и гармонический анализ

1. Числовой ряд, его сходимость и сумма. Необходимый признак сходимости. Свойства сходящихся рядов. Геометрический и обобщенный гармонический ряды.
2. Признаки сходимости положительных рядов: сравнения, Даламбера, радикальный и интегральный признаки Коши.
3. Знакопеременные ряды, абсолютная и условная сходимость. Признак Лейбница.
4. Степенные ряды. Область сходимости.
5. Ряды Фурье.

Учебно-методические материалы и программно-информационное обеспечение

№ п/п	Автор	Название	Издатель-ство	Год издания	Вид издания	Адрес электронного ресурса	Вид доступа
1	2	3	4	5	6	8	9
1.1	Бермант А.Ф., Араманович И.Г.	Краткий курс математического анализа	СПб: Лань	2008	Учебное пособие		
1.2	Владимирский Б.М., Горстко	Математика общий курс	СПб: Лань	2008	учебник		
1.3	Данко П.Е. Попов А.Г.	Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1	М.: Мир и Об-разование	2015 2009 2008 2007	Учебное пособие		
1.4	Данко П.Е. Попов А.Г.	Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.2	М.: ОНИКС: Мир и Об-разование	2015 2009 2008 2007	Учебное пособие		
2.1	Шипачёв В.С.	Высшая математика	М: Юрайт	2011 2012	Учебное пособие		
2.2	Виленкин И.В.	Высшая математика: Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное и интегральное исчисление	Ростов н/Д: Феникс	2011	Учебник		
2.3	Виленкин И.В.	Высшая математика: интегралы по мере, дифференциальные уравнения, ряды	Ростов н/Д: Феникс	2011	Учебник		
2.4	Кузнецов Б.Т	Математика	М.: ЮНИТИ-ДАНА	2012	учебник	http://iprbookshop.ru	С любой точки доступа для авторизованного поль-зователя
2.5	Полтинни	Высшая	Ростов	2012	Уче		

	ков В.И.	математика: учебное пособие для бакалавров. Ч.1	н/Д: ИЦ ДГТУ		бное посо бие		
2.6	Полтинни ков В.И.	Высшая математика: учебное пособие для бакалавров. Ч.2	Ростов н/Д: ИЦ ДГТУ	2013	Уче бное посо бие		
2.7	Полтинни ков В.И.	Высшая математика: учебное пособие для бакалавров. Ч.3	Ростов н/Д: ИЦ ДГТУ	2014	Уче бное посо бие		
6.2.10	Полтинни ков В.И.	Высшая математика: учебное пособие для бакалавров. Ч.4	Ростов н/Д: ИЦ ДГТУ	2015	Уче бное посо бие		
2.8	Пожарски й Д.А., Нурутдин ова И.Н.	Избранные главы математики: интегральное исчисление, дифференциальны е уравнения	Ростов н/Д: ИЦ ДГТУ	2014	Уче бное посо бие		
2.9	Нурутдин ова И.Н., Соболев В.В.	Сборник образцов решения заданий базового уровня по дисциплине «Математика»	Ростов н/Д: ИЦ ДГТУ	2013	Уче бное посо бие	ntb.don stu.ru	С любой точки доступа для авторизова нного поль-зователя
3.1		Сайт Math Высшая математика. Решение задач и примеров – online				http://www.math-pr.com/index.html	С любой точки доступа
3.2		Сайт Решение задач по математике online				http://www.reshmat.ru/index.html	С любой точки доступа

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица основных интегралов

1. $\int 0\,du = C;\ \ C = \text{const};$

2. $\int du = u + C;$

3. $\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C;\ \ \alpha \neq -1;$

3а. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C;$

4. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C;$

5. $\int a^{u} du = \dfrac{a^{u}}{\ln a} + C;$

6. $\int e^{u} du = e^{u} + C;$

7. $\int \cos u\,du = \sin u + C;$

8. $\int \sin u\,du = -\cos u + C;$

9. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C;$

10. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C;$

11. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \dfrac{u}{a} + C;$

12. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C;$

13. $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{u}{a} + C;$

14. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C;$

15. $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg} \dfrac{u}{2}\right| + C;$

16. $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{u}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

17. $\int \operatorname{tg} u\,du = -\ln|\cos u| + C;$

18. $\int \operatorname{ctg} u\,du = \ln|\sin u| + C;$

Приложение 2

Типы дифференциальных уравнений первого порядка

Тип уравнения	Характерные признаки	Методы интегрирования
Уравнения с разделяющимися переменными $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$	Правая часть уравнения представляет собой произведение двух функций, одна зависит от x, другая — от y	Разделить переменные, т. е. уравнение привести к виду $\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$ и проинтегрировать
Однородное уравнение $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	Правая часть уравнения — функция только от отношения переменных y/x	Уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки: $y = zx$, $y' = z'x + z$
Линейное уравнение $y' + p(x)y = q(x)$	y и y' входят в уравнение только в первой степени	Решается методом Бернулли с помощью подстановки: $y = UV$, $y' = U'V + UV'$
Уравнение Бернулли $y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$	y' входит в уравнение только линейно, а y в одном из слагаемых линейно, а в другом в степени α, где $\alpha \neq 1$ и $\alpha \neq 0$	